PC Balzac 2023-24

Devoir surveillé de mathématiques n$^{\text{o}}$ 6
Samedi 30 mars 2024
Durée : 4 heures

***

Documents et calculatrices interdits.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les cinq exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1 : Fonction de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin(t))\mathrm{d}t.$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(t)\sin(x\sin(t)).$$

   Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{\textbf{E}}$$

5. On suppose qu'il existe une solution de $(\mathbf{E})$ développable en série entière notée $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
   Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = \pi$.
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

Exercice 2

1. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2. (a) Démontrer que l'on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x \right) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

   On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

   (b) En déduire la valeur de : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$.

   Calculer $\varphi(1)$.

4. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

   (b) En calculant de deux façons différentes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x \right)$, déterminer la valeur de la somme : $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 3

On définit la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. A l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 4

On rappelle qu'une fonction f est dite *concave* lorsque la fonction $-f$ est convexe.

1. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2, \quad \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

   On admet que ce résultat s'étend à 3 réels strictement positifs de la façon suivante :

$$\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3, \quad \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

   On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par :

$$f(x;y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

2. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Exercice 5 : La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I – Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n).$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

1. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \Delta_n$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II – Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans la question 3, on a monté que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on nomme γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n. \end{cases}$$

II.1 – Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

4. Soit $t \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a :
$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$
5. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln(t)|$.
7. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

II.2 – Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\mathrm{d}u.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.
9. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\mathrm{d}t.$$

10. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

11. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.$$

12. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$