Préparation aux oraux

14 mai 2024

Table des matières

Note : Les planches d'oraux retranscrites ici sont parfois incomplètes, incorrectes, adaptées etc.

La plupart des planches présentes dans ce document émanent de :
— l'Officiel de la Taupe (`http://www.odlt.fr`)
— la Base d'épreuves orales scientifiques de concours aux grandes écoles (`http://beos.prepas.org`)
— planches rapportées par mes précédents étudiants.

I Format des épreuves 2023

CCINP

Durée : 30 minutes de préparation + 30 minutes de passage

L'épreuve orale de mathématiques comporte deux exercices. L'énoncé du premier exercice est remis au candidat lors de son entrée dans la salle d'interrogation. Pour le résoudre, le candidat dispose d'environ trente minutes de préparation écrite et de vingt minutes d'exposé oral. Ce temps écoulé, un second exercice est donné au candidat qui dispose alors pour sa résolution d'environ dix minutes d'exposé oral.

Le premier exercice, que nous appellerons l'exercice majeur, est noté sur 14 points. Il est issu d'une banque d'exercices et est posé au même moment, par tous les examinateurs, à tous les candidats ayant le même horaire de passage. Pour ce qui est de cet exercice majeur, l'objectif est de produire des énoncés progressifs, comportant plusieurs questions, en évitant celles qui sont bloquantes. Le but est clairement de permettre à un candidat correctement préparé d'utiliser efficacement le temps de préparation écrite qui lui est alloué. La banque d'exercices est bien sûr modifiée chaque année et les exercices qui la constituent abordent toutes les parties du programme de première et de seconde année.

Le second exercice est, quant à lui, noté sur 6 points. Comme l'exercice majeur, il est issu d'une banque d'exercices. Contrairement à l'exercice majeur qui est choisi par le coordonnateur de l'épreuve, le choix de ce second exercice est laissé à l'examinateur. Des candidats ayant le même horaire de passage ont donc le même exercice majeur mais pas nécessairement le même deuxième exercice. Ce second exercice ne bénéficie pas d'un temps de préparation écrite. Il porte sur des thèmes distincts de ceux abordés dans l'exercice majeur, ce qui permet une évaluation des compétences du candidat sur un spectre suffisamment large.

Pour les épreuves scientifiques, l'examinateur est seul juge de l'opportunité de l'utilisation de la calculatrice personnelle du candidat en fonction de la nature du sujet à traiter

Concours Mines-Télécom – 1ère série

Durée : 30 minutes sans préparation.

Les épreuves de mathématiques, physique consistent en la résolution, sans préparation, de deux exercices portant sur des parties différentes de l'ensemble des programmes de première et de deuxième années de la filière du candidat.

Cet oral comporte :

- un exercice (analyse ou algèbre ou probabilités) ;
- une ou plusieurs questions de cours, d'applications directes du cours, sur une partie du programme différente de celle testée par l'exercice.

Cette épreuve est sans document, ni calculatrice. Elle dure 50 minutes avec 25 minutes de préparation.

ENSEA Cergy

Durée : 20 minutes de préparation + 20 minutes de passage.

ENSEA (oraux pour ceux non admissible sur centrale et seulement à l'ENSEA) pour les maths, 20 minutes de préparation, 20 minutes de passage. 2 exercices, le candidat choisit l'ordre dans lequel il les présente, mais l'examinateur coupe éventuellement le premier exercice pour que les 2 exercices soient abordés.)

II Rapports des oraux 2023

PC

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

1/ BILAN DE L'ÉPREUVE 2023 ET PRESTATION DES ÉTUDIANTS

Pour le concours PC-physique, la moyenne est de 11,99 et l'écart type de 4,16.
À titre de comparaison, en 2022 la moyenne était de 11,70 et l'écart type de 4,06.
Pour le concours PC-chimie, la moyenne est de 11,91 et l'écart type de 4,17.
À titre de comparaison, en 2022 la moyenne était de 11,64 et l'écart type de 4,04.

La répartition des notes sur 20 est la suivante :

2 % des notes sont dans l'intervalle] 0, 4].
18 % des notes sont dans l'intervalle] 4, 8].
28 % des notes sont dans l'intervalle] 8, 12].
33 % des notes sont dans l'intervalle] 12, 16].
19 % des notes sont dans l'intervalle] 16, 20].

Sur les cinq dernières sessions d'oral, la répartition des notes fait preuve d'une grande stabilité. La moyenne s'inscrit, elle, sur une pente légèrement ascendante. Cela s'explique principalement par la volonté des examinateurs de s'adapter à l'évolution du niveau des candidats et a pour but de récompenser la qualité de leur investissement et de leur préparation. Cela ne doit toutefois pas masquer un certain affaissement du niveau global atteint.

Le format de l'épreuve a permis de classer les candidats de manière tout à fait satisfaisante.
Les candidats font preuve d'une réelle motivation et communiquent plutôt bien.
C'est toujours et encore dans la maîtrise du cours que se trouve le plus important potentiel de progression. C'est un enjeu majeur pour le futur candidat car une bonne connaissance du cours garantit presque à coup sûr une note tout à fait satisfaisante.

Pour bien se préparer, le futur candidat est invité à lire attentivement les deux paragraphes qui suivent.

2/ MODALITÉS DE L'ÉPREUVE EN 2024

L'épreuve orale de mathématiques comporte deux exercices. L'énoncé du premier exercice est remis au candidat lors de son entrée dans la salle d'interrogation. Pour le résoudre, le candidat dispose d'environ trente minutes de préparation écrite et de vingt minutes d'exposé oral. Ce temps écoulé, un second exercice est donné au candidat qui dispose alors, pour sa résolution, d'environ dix minutes d'exposé oral.

Le premier exercice, que nous appellerons l'exercice majeur, est noté sur 14 points. Il est issu d'une banque d'exercices et est posé au même moment, par tous les examinateurs, à tous les candidats ayant le même horaire de passage. Pour ce qui est de cet exercice majeur, l'objectif est de produire des énoncés progressifs, comportant plusieurs questions, en évitant celles qui sont bloquantes. Le but est clairement de permettre à un candidat correctement préparé d'utiliser efficacement le temps de préparation écrite qui lui est alloué. La banque d'exercices est bien sûr modifiée chaque année et les exercices qui la constituent abordent toutes les parties du programme de première et de seconde années.

Le second exercice est, quant à lui, noté sur 6 points. Comme l'exercice majeur, il est issu d'une banque d'exercices. Contrairement à l'exercice majeur qui est choisi par le coordonnateur de l'épreuve, le choix de ce second exercice est laissé à l'examinateur. Des candidats ayant le même horaire de passage ont donc le même exercice majeur mais pas nécessairement le même deuxième exercice. Ce second exercice ne bénéficie pas d'un temps de préparation écrite. Il porte sur des thèmes distincts de ceux abordés dans l'exercice majeur, ce qui permet une évaluation des compétences du candidat sur un spectre suffisamment large.

3/ QUELQUES CONSEILS AUX ETUDIANTS POUR LA SESSION 2024

La stratégie qui consiste à faire des impasses lourdes sur certaines parties du programme n'est pas objectivement payante pour les candidats. Il est en effet important de rappeler que les exercices, qu'ils soient majeurs (sur 14 points) ou secondaires (sur 6 points), abordent toutes les parties du programme (première et seconde années). Il y a donc des exercices (majeurs ou secondaires) traitant des fonctions de plusieurs variables, de polynômes ou encore de nombres complexes. Ces exercices sont souvent volontairement plus faciles que les autres et un candidat qui maîtrise les définitions de base peut s'octroyer un nombre appréciable de points. Il y a aussi des exercices (majeurs ou secondaires) portant principalement sur le programme de première année. Il est donc très utile pour un candidat de consolider ses acquis antérieurs.

Bien maîtriser le temps de préparation écrite est un enjeu important pour une bonne réussite de l'oral. La chose n'est pas aisée et nécessite sans doute un entraînement spécifique. Il faut notamment veiller lors de la préparation écrite à ne pas rester bloqué au niveau d'une question alors que l'on peut en admettre le résultat et traiter la suite. Il est utile à ce sujet de rappeler que les exercices se veulent non bloquants et que par conséquent, les résultats intermédiaires sont donnés. Ajoutons qu'il est sans doute bon de lire le sujet dans son ensemble avant de se lancer. L'idéal serait qu'un candidat ait réfléchi à toutes les questions lors de son temps de préparation écrite.

Au niveau de l'exposé oral, il est conseillé de présenter en priorité les questions que l'on a su traiter. Il ne faut pas perdre de temps à reproduire lentement des calculs déjà effectués lors du temps de préparation écrite. L'intérêt du candidat est donc de présenter de manière précise, concise et rapide tout le travail effectué lors de la préparation écrite et de disposer ainsi d'un maximum de temps pour aborder des questions non traitées avec une aide éventuelle de l'examinateur. Rappelons par ailleurs que s'agissant d'un oral, il est inutile de recopier au tableau tout ce qui est dit. Il faut aussi insister sur l'importance qu'il y a à faire preuve d'énergie et de volontarisme. Même si la phase de préparation écrite ne s'est pas bien déroulée, tout est encore possible.

Le temps alloué à la résolution du second exercice est d'une dizaine de minutes. De plus, cet exercice ne bénéficie pas d'un temps de préparation écrite. Un candidat a donc tout intérêt à faire preuve de vivacité, de réactivité ainsi que d'une bonne maîtrise des notions et savoir-faire de base.

Nous espérons que les futurs candidats sauront tirer profit des différentes remarques et conseils qui précèdent et nous leur souhaitons toute la réussite possible.

1

BILAN DES COORDINATEURS DE L'ÉPREUVE

ORALE DE MATHÉMATIQUES

Philippe Barlier et Hervé Guillaumie

L'épreuve orale consiste en la résolution sans préparation de deux exercices portant sur des parties différentes du programme. Soulignons pour commencer que le programme est celui des deux années des classes préparatoires de la filière du candidat. Certains candidats ont clairement pensé que l'interrogation ne porterait que sur le programme de deuxième année, ce qui peut donner une prestation catastrophique.

Les candidats admissibles avaient été sélectionnés à partir des épreuves écrites du Concours Commun Mines-Ponts, le niveau moyen était bon. Même si l'écart entre les meilleurs et les plus faibles reste important, il s'est resserré cette année et il y avait peu de candidats qui n'étaient pas du tout au niveau.

Statistiques

FILIÈRE	NB CANDIDATS	MOYENNE	ECART-TYPE
MP	1666	11,90	3,316
MPI	253	11,66	2,990
PC	1087	12,04	3,170
PSI	1344	11,95	3,201
PT	550	11,86	3,631

Déroulement de l'épreuve

En entrant dans la salle d'interrogation, le candidat remet à l'examinateur sa convocation, une pièce d'identité et la feuille d 'émargement des examinateurs. Il est souhaitable que ces documents soient prêts à l'avance, tout temps passé à rechercher l'un d'entre eux au fond d'un sac va raccourcir le temps de l'interrogation.
Après ces formalités, soit le candidat tire un sujet au sort, soit reçoit un sujet de l'examinateur. Tous les sujets comprennent deux exercices, et les candidats peuvent commencer par l'exercice de leur choix. Il y a donc une décision à prendre, pour cela l'examinateur laissera quelques minutes de réflexion avant de commencer l'oral proprement dit.

Il est souhaitable que le candidat se décide assez rapidement et informe clairement l'examinateur par quel exercice il commence. On peut penser qu'il est préférable de commencer par la partie qu'on maitrise le mieux, mais il faut être conscient que les deux exercices seront abordés pendant l'épreuve, pas forcément pendant la même durée.

L'épreuve orale ne doit pas être un écrit debout et a pour but de tester, bien évidemment les connaissances en mathématiques et la capacité à les mettre en œuvre, mais aussi, voire surtout, la capacité de dialogue, d'écoute et de compréhension des remarques et indications de l'examinateur. Le candidat doit veiller à adopter une attitude qui favorise l'interaction, il est fortement déconseillé par exemple de rester face au tableau, le dos tourné à l'examinateur. Il est aussi souhaitable d'éviter les attitudes négatives, par exemple en répétant "Je ne sais pas". Il faut bien sûr éviter les propositions de solutions toutes faites, données au hasard, sans savoir justifier leur mise en œuvre. Mais rester silencieux où avouer son incompétence en espérant obtenir des indications de la part de l'examinateur est un comportement sanctionné au niveau de la note.

On attend donc que le candidat se montre sous son meilleur jour. Pour cela, il devra :

- Bien cerner et comprendre les exercices proposés
- Envisager une ou plusieurs méthodes puis choisir la plus appropriée avant de se lancer dans la résolution du problème étudié.
- Expliquer sa démarche à l'examinateur.
- Etre capable de modifier sa stratégie si celle envisagée initialement s'avère inadaptée
- Justifier les affirmations avancées et donner des énoncés corrects et précis des théorèmes de cours utilisés.

Notation

La notation se fait sur un ensemble de critères et non sur la seule connaissance du cours, même si cela reste un point important. Il n'est pas nécessaire de terminer les deux exercices pour avoir une bonne note. Il faut surtout être réactif, savoir prendre des initiatives, mais aussi changer de stratégie si cela est conseillé, le pire défaut est de s'obstiner dans une voie qui conduit à une impasse en restant sourd aux remarques et indications. Un autre travers est de rester trop longtemps silencieux, on attend des candidats un certain dynamisme. Il faut également faire attention à l'organisation du tableau, il est quand même regrettable qu'après deux, voire trois, années de préparation, on voit encore des calculs éparpillés aux quatre coins du tableau. Certains candidats ont été surpris que l'examinateur leur demande de refaire une démonstration, parce qu'ils pensaient qu'elle était correcte, il n'en était bien évidemment rien.

Remarques générales d'ordre mathématiques

Le cours de première année est souvent très mal connu, par exemple celui sur les nombres complexes et la trigonométrie. Les équivalents et les développements limités sont mal maitrisés chez certains candidats. Des examinateurs ont relevé cette année des lacunes sur le théorème du rang et plusieurs points du cours d'algèbre linéaire de première année, même des questions très simples restent parfois sans réponse. De nombreux candidats ne savent pas leur cours ou l'énoncent de façon imprécise ou incomplète. D'une façon générale, on regrette un manque de rigueur dans la résolution des exercices.

Le cours de probabilités, surtout celui de deuxième année, avec une mention particulière pour la formule des probabilités totales et les systèmes complets d'événements, a parfois fait l'objet d'une impasse pure et simple.
En filière MP, les performances sur les exercices d'arithmétiques sont souvent très moyennes.
L'algèbre linéaire reste un domaine difficile. Pour certains cela se résume à des recettes de cuisine appliquées sans le moindre recul : par exemple, utiliser systématiquement le polynôme caractéristique pour déterminer les valeurs propres d'une matrice qui est visiblement de rang 1. Les calculs de déterminants, plus précisément de polynômes caractéristiques, ont souvent été menés de façon maladroite, avec des erreurs de calculs. Des opérations sur les lignes ou colonnes permettaient d'avoir rapidement le résultat. Peu de candidats ont pensé à effectuer de petits calculs sur les colonnes pour obtenir directement des valeurs propres et vecteurs propres associées d'une matrice, ce qui était possible dans certains exercices ou à relier le fait que, pour un scalaire λ, la matrice $A-\lambda I_n$ n'est pas inversible si et seulement si λ est valeur propre de la matrice A. Même quand elle est guidée, la notion de changement de bases pose de gros problèmes.

En algèbre bilinéaire, les notions de projections orthogonales, symétrie orthogonales ne sont pas assez maitrisées, il y a beaucoup de lacunes sur ces points. Plusieurs candidats ne savent pas illustrer par une figure ces applications. Le calcul d'une distance à un sous-espace vectoriel s'avère très difficile (voir infaisable) à mettre en œuvre lorsque l'on est déjà capable de reconnaître que l'on est en présence d'un problème de ce type!

Les théorèmes importants sur les intégrales dépendantes d'un paramètre sont en général bien connus, mais des difficultés techniques restent souvent insurmontables au niveau de la vérification des hypothèses. Par exemple la convergence d'une intégrale qui résulte d'un prolongement par continuité de la fonction intégrée peut donner lieu à des complications étonnantes, on retrouve là une lacune du cours de première année, à laquelle on peut ajouter des difficultés dans l'utilisation des équivalents et des développements limités.

On observe aussi souvent une confusion entre le passage à la limite dans les inégalités et le théorème d'encadrement, aussi bien pour les fonctions que pour les suites : dans le premier cas l'existence de la limite est dans les hypothèses et le résultat est la valeur de la limite, dans le second cas l'existence de la limite est dans la conclusion, avec, en plus, sa valeur.

On rencontre toujours de très nombreux étudiants qui sont incapables de trouver un rayon de convergence d'une série entière lorsque la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

Les performances en logique sont souvent décevantes, on pourrait donner une longue liste des réponses farfelues données pour la négation d'une implication.

Les notions élémentaires en calcul différentiel sont souvent mal connues, en particulier, les notions de limites, de continuité des fonctions de plusieurs variables sont très mal traitées, il en de même pour la règle de la chaîne.

La géométrie a quasiment disparu des programmes de MP, PC et PSI et pour les candidats de ces séries elle a complètement disparu, au point que certains sont incapables de déterminer une équation de droite. En revanche, en filière PT les performances sont en général correctes, notamment en ce qui concerne l'étude des coniques, même si quelques candidats semblaient avoir fait une impasse sur les surfaces.

Remarques spécifiques liées aux nouveaux programmes :

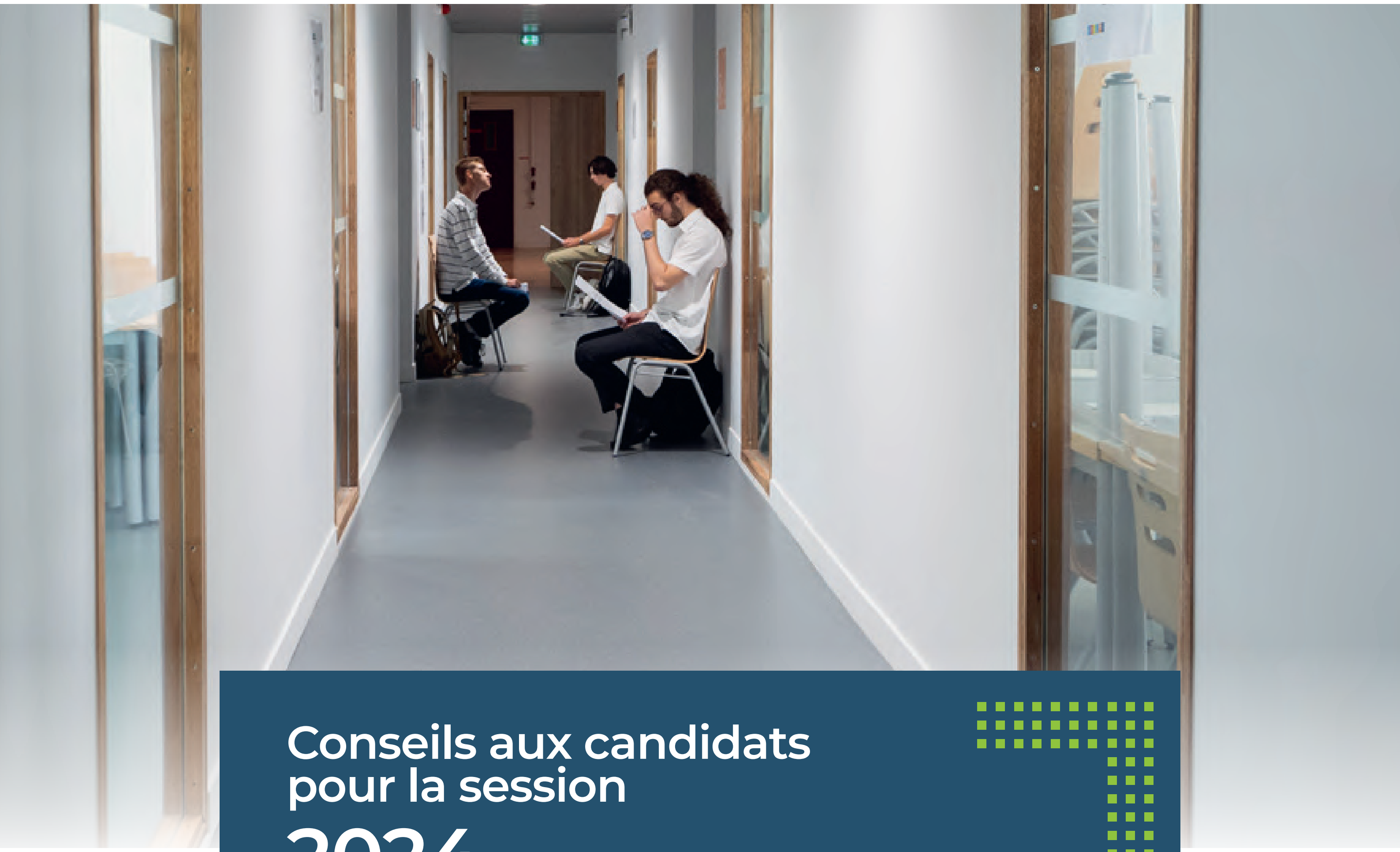
Les modifications des programmes de mathématiques ont légèrement impacté les questions posées, voici les bons et les mauvais points que l'on a rencontrés :

En MP, les étudiants savent, en général aborder un exercice portant sur les normes triples, déterminer la continuité de l'application linéaire et obtenir sa norme triple. Il en est de même de l'adjoint dont la définition et les principales propriétés sont connues. Le fait de travailler sur la demi-droite achevée $\sim^{+} \cup \{+\infty\}$ pour justifier la sommabilité d'une famille de réels positifs puis pour sommer par paquets a aidé les candidats.

La matrice Hessienne et son utilisation sont connues et appréciée et, en général, correctement maîtrisées.

Un point du programme qui est passé sous les radars est le théorème d'intégration termes à termes dans le cas des fonctions positives qui donne une caractérisation entre l'intégrabilité de la fonction considérée et la série des intégrales de la suite de fonctions associée.

Concernant la filière MPI, les examinateurs n'ont pas remarqué de différence significative avec la filière MP, le niveau est similaire avec, peut-être, un niveau d'abstraction plus important.



Conseils aux candidats pour la session 2024

On peut conseiller aux candidats :

- D'avoir des idées très claires sur les grands théorèmes du programme sachant qu'ils devront les utiliser sans préparation. On attend qu'ils en connaissent parfaitement les hypothèses et qu'ils les vérifient : appliquer un théorème de mathématiques ne se réduit pas à citer le nom du théorème (ou d'un mathématicien) mais à vérifier des hypothèses et à en déduire des conclusions.
- De s'habituer (par exemple en colle) à un oral qui soit un dialogue et pas un monologue, il est regrettable que dans certains cas extrêmes l'examinateur doive rappeler sa présence.
- D'être honnête, en évitant par exemple de détourner des indications en laissant croire que c'est ce qu'ils avaient dit, en évitant aussi d'essayer de convaincre l'examinateur que ce qu'ils ont fait est "presque juste" ou d'affirmer péremptoirement des résultats qu'ils ne savent pas démontrer.
- D'éviter les erreurs de langage ou langage trop familier, par exemple, ne pas confondre la fonction et la valeur prise par cette fonction, de commencer presque toutes ses phrases par « du coup », ainsi que d'abuser des abréviations (IPP, TVI, TSSA, etc.).
- De bien lire les énoncés des exercices, surtout si l'examinateur le lui conseille, parce qu'il n'a pas remarqué une information importante.

III Analyse

III.1 Fonctions

1. (CCINP 2023) (Colin)

   Trouver une primitive de $f :]0,1[\to \mathbb{R} ; x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2)$.

2. (CCINP 2022)

   Soit E l'ensemble des fonctions continues et positives sur $[0,1]$.

   Soit $\Phi : E \to E$ tel que $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t$.

   $f_0 = 1$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

   (a) Vérifier que $(x \mapsto 1) \in E$ et $(\mapsto -1) \notin E$. En déduire que E n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) i. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et calculer $\Phi(f)'$.

      ii. Φ est-elle injective ? surjective ?

   (c) i. Montrer qu'il existe (α_n), (β_n) deux suites à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$,

      telles que $\alpha_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2}$ et $\beta_{n+1} = \dfrac{1}{2}\beta_n + 1$.

      ii. Exprimer β_n en fonction de n.

3. (CCINP 2022)

   Soit F l'ensemble des fonctions dérivables de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que

   $$\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = f(\sqrt{x}).$$

   Soit G l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

   $$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = e^t g\left(\frac{t}{2}\right).$$

   (a) Montrer que G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) i. Soit $f \in F$. On pose $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g appartient à G.

      ii. Soit $g \in G$. On pose $f : x \mapsto g(\ln x)$. Montrer que f appartient à F.

   (c) Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence infini et telle que $a_0 = 1$. On suppose que $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \in G$.

      Montrer que $na_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k}\frac{1}{(n-1-k)!}$

   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant \dfrac{2^n}{n!}$

4. (CCINP 2022)

   Soit $E = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 \ / \ x^y = y^x\}$.

   On remarque que si $x > 0$, alors $(x,x) \in E$ et que si $(x,y) \in E$, alors $(y,x) \in E$.

   On pose $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ pour $x > 0$.

(a) Montrer que : $(x, y) \in E \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.

(b) Pour quelles valeurs de $x > 0$, a-t-on $(x, x^2) \in E$?

(c) Donner le tableau des variations de φ.

(d) Montrer qu'il n'existe pas de y tel que $x < y$ et $(x, y) \in E$ avec $x \in]0, 1]$.

(e) Pour $x \in]1, \mathrm{e}[$, montrer qu'il existe un unique $y \in]\mathrm{e}, +\infty[$ tel que $(x, y) \in E$. On pose alors $\psi(x) = y$.

(f) Montrer que ψ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$.

(g) Trouver les solutions de : $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $a^b = b^a$.

5. (Mines-Télécom 2022)
En appliquant le théorème des accroissements finis, prouver l'encadrement
$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \dfrac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x.$

6. (CCINP 2019)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x + 1) = xf(x),\ f(1) = 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) > 0$.

(a) Énoncer le théorème de Rolle.

(b) i. Expliciter $f(n)$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.

ii. Montrer qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) i. Montrer que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$; déterminer son signe.

ii. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(d) Préciser la nature des intégrales suivantes :

i. $\int_1^{+\infty} f$ ii. $\int_0^1 f$ iii. $\int_1^{+\infty} 1/f$

7. (CCINP 2019, CCP 2018)
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\sqrt{\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \end{cases}$.

(a) Quel est le domaine de définition de f ?

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(x)| \leq |x|$. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, on note g son prolongement.

(c) Pour $x > 0$, on pose $Tf(x) = \frac{f(x)}{x}$. Est-ce que Tf admet une limite en 0 (utiliser $x_n = 2/(2n + 1)$ et $y_n = 1/(n + 1)$) ? g est-elle dérivable en 0 ?

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq 2$. La fonction f est-elle continue en $1/k$? Préciser l'ensemble des points où f est continue (prendre $I = \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$ et $J = \left]\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right[$).

(e) Existence et calcul de $\int_{1/2}^1 f(x)dx$.

8. (Mines Télécom 2019)
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

9. (Mines Télécom 2019)
On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.
Déterminer un développement limité de f en 0 à un ordre le plus grand possible.

10. (CCINP 2019)
On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
    (a) Montrer que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
    (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
    (c) Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
11. (Mines Télécom 2019)
Montrer que $\arccos(1-x) \sim \sqrt{2x}$ quand $x \to 0^+$.
On pose $y = \arccos(1-x)$. *Vérifier que* y *tend vers zéro et penser à utiliser le caractère bijection d'arccos.*
12. (Mines Télécom 2017)
Soit C l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x > 0$, on définit $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$ (avec $f \in C$).
    (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0.
    (b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa dérivée.
13. (CCP 2016)
    (a) Montrer que $f(x) = e^{-1/x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
    (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}_n[X], f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.
    (c) On pose $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(x) = 0$ si $x \leq 0$.
    (d) Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
    (e) Peut-elle être solution d'une équation différentielle homogène d'ordre n ?
14. (CCP 2016)
Domaine de définition de $f(x) = \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer f'.
15. (Mines Télécom 2016)
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.
16. (ENSEA 2016)
Résoudre $3^x + 4^x = 5^x$.
17. (Mines Télécom 2015)
Un marcheur parcourt (continûment) 6 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure durant lequel il parcourt exactement 3 kilomètres.
18. (CCP 2015)
On considère la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = \dfrac{1-t^3}{t}$
    (a) Calculer f'. En déduire que f réalise une bijection de $]0, 1]$ vers $[0, +\infty[$
    (b) On pose u la bijection réciproque de f. Montrer que $\forall x \geq 0, (u(x))^3 + x.u(x) - 1 = 0$
    (c) Montrer que u est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \geq 0, u'(x) = \dfrac{-u(x)}{3u(x)^2 + x}$

(d) Montrer que $u(1) \geq \dfrac{1}{2}$ à l'aide de 18b puis $|u'| \leq \dfrac{1}{3u}$

(e) Montrer que $u(x)$ est équivalent en $+\infty$ à $1/x$.

(f) Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - u(x)}\mathrm{d}x$.

(g) On pose $a_0 = \dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1} = u(a_n)$; on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = L$; donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(a_n - L)$.

III.2 Equations différentielles

19. (CCINP 2023)
Soit $(E) : \cos t\, y + \sin t\, y' = -\cos t \sin t$
Donner l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

20. (CCINP 2023)
Soit S l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :
$y''(x) - (x^4 + 1)y(x) = 0$.
On pose f l'unique élément de S vérifiant $f'(0) = f(0) = 1$.

(a) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)^2$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ g''(x) \geq 0$.

(d) Montrer que $f(x)^2 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

(e) Posons $h(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{g(t)}$. Montrer que h est définie et $h \in S$.

(f) Montrer que (f, h) est une base de S.

21. (CCINP 2022)
Résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

22. (Mines Télécom 2022)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $(P) : \begin{cases} y'' - y = f \\ y(0) = y'(0) \\ y(1) = -y'(1) \end{cases}$

(a) On note s_P une solution particulière de (P). Donner les solutions de l'équation $y'' - y = f$ en fonction de s_P et de deux constantes.

(b) Montrer qu'il existe au plus une solution à (P).

(c) Soit $g(x) = -\dfrac{e^x}{2}\displaystyle\int_x^1 f(t)e^{-t}\mathrm{d}t - \dfrac{e^{-x}}{2}\int_0^x f(t)e^t\mathrm{d}t$. Montrer que g est solution de (P).

23. (CCINP 2022)
Résolution de l'équation différentielle $(E) : xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

(a) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que h définie par $h(x) = x^\alpha$ soit solution de (E).

(b) Justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,dt$ diverge.

(c) On note $G(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Faire le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}^{*+}$. Montrer que $G(x) \to -\infty$ quand $x \to 0^+$ et que $G(x)$ possède une limite pour $x \to +\infty$.

(d) Soit $s(x) = xf(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que s est solution de (E) si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle du 1er ordre.

(e) Résoudre cette équation différentielle.

(f) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}^{*+}$ de (E).

24. (Mines Télécom 2022)
On note (E) l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x$.

   (a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

   (b) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy
   $$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
   Sans calcul, déterminer le nombre de solutions de ce problème sur un intervalle bien choisi.

   (c) Résoudre l'équation différentielle (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   (d) Dans le cas $(x_0, y_0) = (0, 1)$, trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy de la question 2.

25. (Mines Télécom 2021) (Anna)
$(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \dfrac{1}{1-x}$.

   (a) Résoudre (H), l'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, en cherchant des solutions sous la forme $x \mapsto x^a$.

   (b) Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$.

   (c) Soit f une solution développable en série entière de (E). Déterminer les coefficients de la série entière et le rayon de convergence.

   (d) Calculer f.

   (e) Donner les solutions de (E) sur $]0, 1[$.

26. (CCINP 2021) (Chloé, Enzo, Armand)
On considère l'équation différentielle $(E) : xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (a) Trouver un réel α tel que $h_\alpha : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h_\alpha(x) = x^\alpha \end{array}$ soit solution de (E).

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge.

   (c) On définit la fonction G sur $\mathbb{R}_+^*$ par $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$.
   Dresser le tableau de variations de G. Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} G(x) = -\infty$.

   (d) i. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $s : x \mapsto xf(x)$.
   Montrer que s est solution de (E) si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 (E') à déterminer.
   ii. Résoudre (E').

   (e) Donner les solutions de (E) en utilisant G.

(f) Déterminer les limites des solutions de (E) en 0.

27. (CCINP 2021) (Juliette)
Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) : x \mapsto f'(x) - xf(x)$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme.
   (b) Résoudre $y' - xy = 0$. En déduire $\operatorname{Ker} \varphi$. φ est-il injectif ?
   (c) Montrer que φ est surjectif.
   (d) Dans cette question, on considère $g : x \mapsto (1 + x^2)e^{x^2}$.
      i. Résoudre complètement $y' - xy = g$ à l'aide de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x (1 + t^2)e^{t^2/2}\mathrm{d}t$

   (Questions manquantes.)
   (e) Montrer que φ induit un endomorphisme dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des applications polynomiales. ϕ est-il injectif ? surjectif ?

28. (CCINP 2019)
On considère l'équation différentielle (E) suivante sur $]-1, 1[$:
$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + 4y(x) = x.$$
Etant donné une fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$, on définit sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la fonction
$$z : t \mapsto y(\sin(t)).$$
   (a) Exprimer z' et z''.
   (b) Montrer que y est solution de (E) sur $]-1, 1[$ si et seulement si z est solution sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle (F) suivante :
$$z''(t) + 4z(t) = \sin(t).$$
   (c) Résoudre (F) puis (E).

29. (Mines Télécom 2019)
Trouver l'ensemble des fonctions f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \int_0^x (x - t)f(t)dt = 1.$

30. (CCINP 2019)
   (a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(n!)^2}$ a un rayon de convergence infini.
   (b) On note J sa somme ; montrer que : $\forall t \geq 0,\ J(t) \geq 1$ et que $J(t) - 1 \sim t$ au voisinage de 0.
   (c) Montrer que $N(t) = J(t) \displaystyle\int_1^t \frac{du}{uJ(u)^2}$ est définie pour t dans $\mathbb{R}_+^*$ puis que :
   $N(t) - J(t)\ln t = J(t) \displaystyle\int_t^1 \frac{J(u)^2 - 1}{uJ(u)^2}du$
   (d) En déduire un équivalent de N au voisinage de 0.
   (e) Montrer que J est solution de $(E) : ty'' + y' - y = 0$.
   (f) On pose $z = \frac{y}{J}$, supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution d'une équation du premier ordre que l'on résoudra.

(g) Donner les solutions de (E) à l'aide de J et N.
(h) Donner les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

31. (CCINP 2019)
On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(a) Montrer que ϕ, qui, à $f \in E$, associe g donnée par $g(x) = f'(x) - xf(x)$, est un endomorphisme.
(b) Résoudre $y' - xy = 0$ et en déduire $\operatorname{Ker}\phi$. ϕ est-elle injective ? Surjective ?
(c) Soit $g(x) = (1+x^2)e^{x^2}$. Ecrire les solutions de $y' - xy = g$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)e^{t^2/2}\mathrm{d}t$.
(d) Déterminer $h(x)$ telle que $f(x) = h(x)e^{x^2}$ soit solution de $y' - xy = g$ avec $f(0) = 0$ puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)e^{t^2/2}\mathrm{d}t$.
(e) Montrer que la restriction ψ de ϕ au sous-espace P des fonctions polynomiales est un endomorphisme. Est-il injectif ? Surjectif ?

32. (CCP 2018)
Soit (E) l'équation différentielle : $xy'' + 2y' - xy = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(a) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) ?
(b) Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, où $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
  i. Déterminer son rayon de convergence R.
  ii. Exprimer sa somme $f(x)$ pour $x \in]-R,R[$ à l'aide de fonctions usuelles.
(c) On donne une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ait un rayon de convergence $R' > 0$. Montrer que si $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est une solution de (E) (sur $]-R,R[$) vérifiant la condition $g(0) = 1$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a_n$.
(d) Montrer que la fonction $x \mapsto y(x)$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, est solution de (E) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra, avec : $z : x \mapsto \frac{y(x)}{f(x)}$. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

33. (CCP 2018)
Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$(E) : xy'' + xy' - y = 0.$$

(a) Déterminer un réel α tel que $h_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.
(c) Soit $G : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $s : x \longmapsto xf(x)$. Montrer que s est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E'), que l'on précisera.
(e) Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.
(f) Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide de la fonction G.

34. (CCP 2018)
Soit $r > 0$. Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$.
Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + \dfrac{\alpha}{x}y = \dfrac{f(x)}{x}$.
Pour tout $x \in]0,r[$, on pose $T_\alpha(f)(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}f(u)\,\mathrm{d}u$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y'+\dfrac{\alpha}{x}y=0$.

(b) Pour tout $x\in]0,r[$, montrer l'existence de $M_x\geqslant 0$ tel que $\forall t\in[0,x], \quad |f(t)|\leqslant M_x$. En déduire que pour tout $x\in]0,r[$, la fonction $u\mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ est intégrable sur $]0,x]$.

(c) Montrer que la fonction $T_\alpha(f)$ est solution de (E) sur $]0,r[$ puis résoudre (E) sur cet intervalle.

(d) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x\in]0,r[, \quad T_\alpha(f)(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+\alpha}x^n$.

(e) Montrer que (E) admet une unique solution sur $]0,r[$ qui possède une limite finie en 0.

35. (EIVP 2017)

(a) Résoudre $xy'-(1+\lambda)y=0$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

(b) Eléments propres de $\phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, défini par $\Phi(P)(X)=XP'(X)-P(X)$.

36. (CCINP 2019, CCP 2017)

Résoudre $y''-y+e^{-x}=0$ puis déterminer $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f'(x)=e^{-x}+\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

37. (TPE-EIVP 2016)
Trouver toutes les fonctions $f:R\longrightarrow R$ telles que :
f est dérivable et $\forall x\in R\ f'(x)f(-x)=1$. (Considérer $g(x)=f(x)f(-x)$)

38. (CCP 2016)
Soit (E) l'équation : $2(x-x^2)y''(x)+(x-2)y'(x)-y(x)=0$.

(a) Montrer que $y_0:x\mapsto x-2$ est solution.
Soit I l'intervalle $]1,2[$ ou $]2,+\infty[$.

(b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z:x\mapsto\dfrac{y(x)}{x-2}$ est solution d'une certaine équation différentielle d'ordre 2 que l'on explicitera.

(c)
  i. On pose $\varphi:x\mapsto -2\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$. Montrer que φ est dérivable sur I et calculer $\varphi'(x)$ sur I.
  ii. Résoudre (E) sur I sachant que $\dfrac{4-3x^2}{2x(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{2}{x-2}$.
  iii. Résoudre sur $]1,+\infty[$.
  iv. Résoudre sur $]0,+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

39. (CCP 2015)
Soit a appartenant à $\mathbb{R}$.
$S_a=\{f$ de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-f(a-x)$ et $f(0)=0\}$

(a) Montrer que si f appartient à S_a alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

(b) Déterminer S_a.

40. (TPE EIVP 2015)
Soit l'équation différentielle : $y''+xy=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$
Résoudre l'équation différentielle en utilisant des séries entières.

41. (Mines Télécom 2015)
On considère l'équation différentielle $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$.
    (a) Trouver toutes les solutions développables en série entière en zéro de cette équation différentielle. Calculer la somme de chacune de ces solutions.
    (b) Y a-t-il des solutions à cette équation différentielle non développables en série entière en zéro ?
42. (CCP 2015)
Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' + y' - 2y = 0$ puis $y'' + y' - 2y = (4-3x)e^{-2x}$.
43. (CCP 2015)
    (a) Donner la nature de l'ensemble S des solutions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''(x) = (1+x)y'(x) + y(x)$.
    (b) Combien d'éléments y de S vérifient $y(0) = y'(0) = 1$?
    (c) Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^{x+\dfrac{x^2}{2}}$ est dans S.
    (d) Donner un développement limité à l'ordre 3 de f.
    (e) On note $I_0 = 1$ et I_n le nombre d'applications σ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même vérifiant $\sigma \circ \sigma = Id$. On suppose que $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
    (f) Montrer qu'une telle application est une bijection. Calculer I_n pour $1 \leq n \leq 3$.
    (g) Montrer que $I_n \leq n!$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!}x^n$ possède un rayon de convergence non nul. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!}x^n = f(x)$.
    Manque question.
    (h) Montrer que $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

III.3 Calcul différentiel

44. (CCINP 2022)
Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les points critiques de f et préciser si il y a des extrema locaux.
45. (CCINP 2021) (Claudia)
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ telles que
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
    (a) Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Montrer que $f : (x,y) \mapsto g(\dfrac{y}{x})$ appartient à $\mathcal{E}$.
    (b) i. Soit $v > 0$. On définit : $\forall t > 0$, $\Phi(t) = f(t, vt)$. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall t > 0, \Phi(t) = \Phi(1)$ *(on peut calculer $\Phi'(t)$).*
        ii. Prouver que $f \in \mathcal{E} \Leftrightarrow f(x,y) = g(\dfrac{y}{x})$, avec $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
    On considère l'équation $(E) : x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$
    (c) i. Soit $\Gamma(t) = f(xt, yt)$. Montrer que $\Gamma'(t) = \dfrac{t(x^2+y^2)}{1+t^2(x^2+y^2)}$

ii. *(Question manquant. J'imagine :)* En déduire une solution particulière de (E) puis l'ensemble des solutions de (E).

(d) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est définie et bornée.

46. (CCINP PSI 2019)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x^3y^2(x + y - 1)$.
    (a) Trouver les points critiques de f.
    (b) Déterminer les extremums locaux de f.

47. (CCINP 2019)
    (a) Montrer que $f(x, y) = (x + y)(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
    (b) Déterminer les points critiques de f et donner leur valeur.
    (c) On pose $P(t) = (t\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}})^2 + (t\sqrt{y} + \dfrac{1}{\sqrt{y}})^2$. Montrer que $\deg(P) = 2$ et calculer Δ. En déduire que f admet un minimum global.
    (d) On pose $g(x_1, \dots, x_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k})$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que $g(x_1, \dots, x_n) \geq n^2$ et trouver au moins un n-uplet vérifiant l'égalité.
    (e) Montrer que $g(x_1, \dots, x_n) = n + \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i})$ et en déduire une nouvelle méthode pour montrer le résultat précédent.

48. (CCINP 2019)
Soient $D =]-1, 1[\times \mathbb{R}$ et $f : (x, y) \in D \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2}\cos(y)$.
    (a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
    (b)
        i. Préciser les points critiques de f.
        ii. Montrer que : $\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) - f\left(\sqrt{3}/2, \pi\right) \leq x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 5/4$.
        iii. En posant $u = \sqrt{1 - x^2}$, montrer que f atteint son maximum global en $\left(\sqrt{3}/2, \pi\right)$.
    (c)
        i. Étudier le signe de $f(0, y) - 1$.
        ii. Faire un développement limité à l'ordre 2 de $f(x, \pi) - 1$.
        iii. Le point $(0, \pi)$ est-il un extremum local ?
    (d) Montrer que le point $(0, 0)$ est un minimum global.

49. (CCINP 2019)
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \mathrm{ch}(2x) - \cos(2y)$.
On considère les ensembles $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$ et
$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < 1\}$.
    (a) Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\mathrm{sh}(t) \geq t$.
    (b) Montrer que f admet un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.
    (c) Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D.
    (d) Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D'.
    (e) En déduire qu'il existe $t_0 \in [0, \pi/2]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.

(f) Étudier les variations sur $[0, \pi/2]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Conclure.

50. (CCP 2018)
On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est harmonique si g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.
   (a) Trouver a, b dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$.
   (b) Résoudre $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$ sur les intervalles appropriés.
   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose $F = f \circ g$. Donner l'expression de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
   (d) On suppose que f'' ne s'annule jamais et que g est harmonique. Montrer que F est harmonique si et seulement si g est constante.
   (e) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on pose $G : (x, y) \mapsto h\left(\frac{\cos(x)}{\mathrm{ch}(y)}\right)$. Déterminer h pour que G soit harmonique.

51. (CCP 2018)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $E = C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F = C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Soit $\phi : f \to \frac{\partial f}{\partial x} - af$
   (a) Montrer que ϕ est une application linéaire de E dans F.
   (b) Soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \sin(y)\exp(ax)$. Calculer $\phi(f)$.
   (c) Soit $G = \{\alpha(y)\exp(ax)$ avec $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. Montrer que $G \subset Ker(\phi)$. ϕ est elle injective ?
   (d) Soit $A \in F$. Soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \exp(ax)\int_0^x A(t, y)\exp(-at)dt$. Montrer que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer. Montrer que $\phi(f) = A$.
   (e) Montrer que $G = Ker(\phi)$.
   (f) Trouver toutes les fonctions $f \in E$ telles que :
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$.

52. (CCP 2018)
   (a) Soit $g : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow x\exp(\frac{1}{x}) + \exp(x)$.
   Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
   (b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longrightarrow x\exp(y) + y\exp(x)$.
   Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$ *et* $x_0 y_0 = 1$ *et* $g(x_0) = 0$.
   Déterminer le(s) point(s) critique(s).
   (c) Soit $x \longrightarrow f(-1 + ax, -1 + x)$ où $a \in \mathbb{R}$.
   Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
   (d) Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
   (e) Notons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \mid x \mid \leq 1$ *et* $\mid y \mid \leq 1\}$.
   Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

53. (TPE-EIVP PSI 2017)
Posons $f(x, y) = (x - y)^2(1 - x^2 - y^2)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Préciser le signe de f.
   (b) Déterminer les points critiques de f.
   (c) f possède-t-elle un minimum global ?

(d) Montrer que f possède un maximum global et préciser les points où il est atteint.

(e) Préciser les extrema locaux de f.

54. (CCP 2017)

(a) Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

(b) Soit $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2)$. Exprimer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(x,t)\mathrm{d}t$ en fonction de g, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x,x) + \displaystyle\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

(c) Dans cette question, f désigne une fonction $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles. Montrer que $\phi(x,y) = \displaystyle\int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t$ admet des dérivées partielles et les expliciter.

55. (Mines Télécom 2017)

(a) Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' + 2ty = 0$.

(b) Soit f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$ avec g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

i. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

ii. Déterminer les fonctions f telles que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

56. (Banque PT I 2017) Déterminer les points critiques de $f(x,y) = \dfrac{1}{5}(x^4 + y^4 + xy)$.

57. (Banque PT I 2016) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$.

(a) Rappeler le théorème de Schwarz. Qu'en déduit-on pour f ?

(b) Trouver les points critiques de f.

(c) Trouver les extrema locaux, puis les extrema globaux de f.

(d) Soit g la restriction de f à $[-2,2] \times [0,3]$. Montrer que g est bornée et atteint ses bornes. Trouver les extrema globaux de g.

58. (CCP 2016)
Trouver l'(es) extremum(s) de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.

59. (CCP PSI 2016)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 - 2x - 4y \end{array}$

(a) Déterminer les extremums locaux de la fonction.

(b) f admet-elle un maximum global sur $\mathbb{R}^2$?

(c) Préciser le minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant x \leqslant 2 \, , \, 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

(d) Représenter l'ensemble D.

(e) Quels sont les extremums globaux de f sur D ?

60. (CCP 2015)
Soit n un entier strictement positif, $E = R^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E , A une matrice symétrique de $M_n(R)$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique. On étudie la fonction f de E dans R qui à tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $f(x) = \langle x, \varphi(x)\rangle - 2\langle x, u\rangle$.

(a) Ici $n=2$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u=(5,1)$.
Vérifier que $f(x)=3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2-10x_1-2x_2$.
Montrer que $X_0=(2,1)$ est un point critique de f.

(b) Avec les conditions de la question 1 : soit $h=(h_1,h_2)$.
Montrer que $f(X_0+h)-f(X_0)=ah_1^2+bh_2^2+ch_1h_2$ où a,b,c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que f admet un extremum en X_0.

(c) On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E, $\langle x,\varphi(x)\rangle>0$. Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ, montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

61. (CCP 2015)
Soit $f: R^2\to R$ $(x,y)\mapsto e^x+e^y+e^{-x-y}$
   (a) Montrer que $\forall t\in R, e^t\geqslant 1+t$
   (b) Déterminer tous les points critiques de f et donner leur nature. Existe-t-il un maximum ?

62. (CCP 2015)
Donner le laplacien de $F(x,y)=\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

63. (Mines Télécom 2015)
   (a) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$; on pose $g(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.
   (b) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}^{*3}$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$.
   (c) On note $\Delta g=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.
   Montrer que $\Delta g=\dfrac{2}{r}f'(r)+f''(r)$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
   (d) Trouver f tel que $\Delta g=0$.

64. (Banque PT I 2015)
   (a) Montrer que $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$ n'est pas bornée.
   (b) Trouver les points critiques et préciser leur nature si c'est possible.
   (c) Montrer que le point $(0,0)$ est un point col, c'est à dire qu'il n'est ni maximum local, ni minimum local.
   (d) Calculer $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

65. (Banque PT II 2015) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F(x,y)=\int_{-x}^{y} f(2x+t)e^{x+t}\mathrm{d}t$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que F est bien définie et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra effectuer un changement de variable).
   (b) Trouver une CNS sur f pour que F soit solution de l'EDP :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial F}{\partial x}-4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+F=1$$

66. (Banque PT I 2015) Fonctions homogènes de degré α. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $U=\mathbb{R}^2$ telle qu

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t>0 \qquad f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$$

(a) Montrer que f vérifie

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$$

(b) On effectue le changement de variable $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$,
pour $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[$. Déterminer la nouvelle équation déterminée par f après passage en polaire.

(c) Réciproque :

67. (Banque PT II 2015) On pose $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et $f(0,0)=0$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

(c) Calculer les dérivées croisées secondes en $(0,0)$ et conclure.

(d) Déterminer une équation du plan tangent en $A(1,-1,-1/2)$ à la surface définie par $z=f(x,y)$.

68. (Banque PT II 2015)

(a) Montrer que, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

On pose $F(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$

(b) Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t^4e^{-t^2}\mathrm{d}t$

(c) Montrer que $F(x,y)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{x^2+4xy+y^2}{2}+x^2y^2$.

(d) Trouver les points critiques de F

(e) Déterminer leur nature.

III.4 Suites et séries numériques

69. (CCINP 2023) (Lowell, Pascal, Elisa)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, $v_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $w_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$ et $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$.

On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(a) Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

(b) i. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$w_n=\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n+1-k}\right).$$

ii. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, w_n=\dfrac{(-1)^n}{n+2}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(k+1)^2}+\dfrac{2(-1)^n}{(n+2)^2}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}$.

(c) i. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent simple de R_n en $+\infty$.

ii. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = O(\ln(n))$

(d) On suppose que $w_n = \dfrac{(-1)^n \pi^2}{6(n+1)} + O(\dfrac{\ln(n)}{n^2})$. Montrer que $\sum w_n$ converge mais ne converge pas absolument.

(e) Montrer que $w_n = \dfrac{(-1)^n \pi^2}{6(n+1)} + O(\dfrac{\ln(n)}{n^2})$.

70. (CCINP 2023, CCINP 2019) (Antoine, Clément, Zoheir)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs.

On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $v_n = d\frac{u_n}{S_n}$, $w_n = d\frac{u_n}{(S_n)^a}$, avec $a \in \mathbf{R}$.

(a) On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 1$. Donner la nature de $\sum u_n,\ \sum v_n,\ \sum w_n$.

(b) On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

i. Que peut-on dire de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

ii. Donner un équivalent de v_n et w_n. En déduire la nature de $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

(c) On suppose que la série $\sum u_n$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

i. Montrer que $v_n \sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. En déduire la nature de $\sum v_n$.

ii. En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a \leq 1$.

iii. Si $a > 1$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ w_n \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^a}$.

iv. En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a > 1$.

71. (CCINP 2022)

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto f(x+n) - f(n)$ sur $]0, +\infty[$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$ pour lequel la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge, on pose $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n(1) = f(N+1) - f(1)$. En déduire que l'existence de $F(1)$ équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Dans cette question, on prend pour f la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Montrer que $F(1)$ existe.

(c) Dans cette question, on prend pour f la fonction $x \mapsto \sin(\pi x + \frac{\pi}{2}\sqrt{x})$. Montrer que $F(1)$ n'existe pas.

On pourra s'intéresser à $f((2n+1)^2)$.

72. (Mines Télécom 2022)

Soit $a > 0$, $b > 0$.

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$.

(a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont définies et strictement positives.

(b) Montrer que $\forall n \geq 1, a_n > b_n$.

(c) Montrer que (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante, à partir de $n = 1$.

(d) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite et l'exprimer en fonction de a et b.

Indication : Pour trouver la valeur de la limite, on pourra montrer que la suite $(a_n b_n)$ est constante.

73. (CCINP 2022)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On définit la fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ sur la réunion des I_n.

(a) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n, notée x_n dans la suite.

(c) Montrer que x_n est équivalent à $n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $y_n = \arctan x_n$. En déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.

(e) Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)$ équivaut à $y_n - \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

(f) En déduire un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(g) Obtenir un développement asymptotique de la forme

$$y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

74. (CCINP 2022)

Soit $a > 0$. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = a$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

On admet que tous les termes de cette suite sont strictement positifs et on pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

(a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite tend vers $+\infty$.

(b) Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'égalité $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\dfrac{u_{n+p+1}}{u_{n+p}^2}\right)$ et en déduire l'encadrement

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

(c) Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, prouver l'encadrement

$$0 \leqslant v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

(d) Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée L.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \exp(2^n L)$ et $s_n = t_n - u_n$.

(e) Montrer que u_n est équivalent à t_n quand n tend vers $+\infty$.

(f) Déterminer une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

(g) En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

75. (CCINP 2021)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

(a) Justifier l'existence de $\lim u_n$ et la calculer.

(b) Etudier la convergence de $\sum u_n$.

76. (CCINP 2021)
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.
On note $u_n(x) = f(n+x) - f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et, en cas d'existence, $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
   (a) i. Vérifier $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n(1) = f(N+1) - f(1)$.
   ii. En déduire que $F(1)$ existe si et seulement si $(f(n))$ converge.
   (b) i. On considère $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$. Montrer que $F(1)$ existe et calculer sa valeur.
   ii. On considère $f : x \mapsto \sin(\pi x + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\pi)$. Montrer que $F(1)$ n'existe pas.
   (c) On suppose que $\sum f(n)$ converge.
   i. Montrer que $F(p)$ existe, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   ii. On note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$. Prouver l'existence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} F(p) - F(p+1)$ et exprimer sa valeur en fonction de S.

77. (Mines Télécom 2021)
Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

78. (CCINP 2021)
On pose $a_n = -\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $D_n = a_{n+1} - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} D_n$ converge.

79. (CCINP 2021)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, vérifiant $a_0 > 0$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{a_n}$.
Montrer que la suite décroît, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

80. (CCINP 2021)
   (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique.
   Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1} + u_{2i}) = \sum_{i=1}^{2p} u_i$.
   (b) i. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
   ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
   Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right).$$
   En déduire que $\quad R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right)$.
   (c) i. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g_n : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$.
   Montrer que g_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et que sa dérivée est croissante.

ii. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire que
$\frac{1}{2}\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \leq |R_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$

iii. Montrer que la série $\sum R_n$ converge.

81. (Mines Télécom 2021)
On rappelle que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n+\gamma+o(1)$ où $\gamma\in\mathbb{R}$.
Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ et calculer sa somme.

82. (CCINP 2021)
On pose pour tout $n\geqslant 2$, $u_n=\prod_{k=2}^{n}(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ et $v_n=\ln\left(\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge, puis que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

83. (CCINP 2019)
   (a) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
   (b) Étudier la nature de la série de terme général $b_n=\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}\right)$.

84. (Mines Télécom 2019)
Nature des séries :
   (a) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+\cos(n)}$.
   (b) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln^3(n)}$

85. (CCINP 2019, Mines Télécom 2019)
À l'aide de la formule de Stirling, trouver un équivalent de $\ln n!$. Étudier la convergence de la série $\sum\frac{1+1/2+\ldots+1/n}{\ln(n!)}$.

86. (CCINP 2019)
Soit $n\geq 2$ et on pose $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   (a) Nature de $\sum_{n\geq 2}\ln(1+a_n)$.
   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\prod_{k=2}^{n}(1+a_k))$.

87. (Mines Télécom 2019)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{e^{-u_n}}{n+1}$.
   (a) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   (b) Déterminer la limite de la suite (v_n), avec : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=nu_n$.
   (c) Quelle est la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$?

88. (CCINP 2019)
On donne deux réels positifs a et b tels que $b>a$ et on note u_n le terme général d'une suite strictement positive vérifiant : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$.
   (a) Déterminer un équivalent de $\ln\frac{n+a}{n+b}$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -\infty$ et en déduire la convergence de (u_n).

(c) On pose $\alpha = b - a$ et $v_n = n^\alpha u_n$; montrer que $\sum \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est convergente.

(d) Montrer qu'il existe un réel strictement positif A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}$.

(e) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ au_0 - (n + a + 1)u_{n+1} = (b - a - 1)\sum_{k=1}^{n+1} u_k$.

(f) Montrer que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

89. (TPE 2019)
Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et discuter la convergence de celle-ci en fonction de la valeur de u_0.

90. (CCINP 2019)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
Soit $f : x \mapsto \tan(x) - x$.

(a) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de tan.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique x_n dans I_n tel que : $f(x_n) = 0$.
ii. Montrer que : $x_n \sim n\pi$.

On pose $y_n = x_n - n\pi$

(c) i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \arctan(x_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
ii. Justifier que : $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) \sim y_n - \frac{\pi}{2}$. En déduire un équivalent de $y_n - \frac{\pi}{2}$.

(d) Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{x_n \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) - 1}{x_n + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)}$.

(e) Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que :

$$x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

91. (Mines Télécom 2019)
Convergence et limite de la suite de terme général $u_n = \prod\limits_{k=2}^{n} (2 - \sqrt[k]{3})$.

92. (Mines Télécom 2019)
Étudier la nature de $\sum(\mathrm{Arctan}(n + \alpha) - \mathrm{Arctan}\, n)$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

93. (Mines Télécom 2019)
Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \cos(n^2\pi \ln \dfrac{n-1}{n})$.

94. (CCINP 2019)
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant u_0 dans $]-1, 0[$ et en appliquant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

(a) On définit la fonction $f : x \mapsto x + x^2$. Etudier la variations de f. En déduire que l'intervalle $]-1, 0[$ est stable par f.

(b) Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $]-1, 0[$ et en déduire que cette suite converge. Préciser sa limite.

(c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$. Exprimer sa somme en fonction de u_0.

(d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

(e) Etudier la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

(f) On pose $a_n = (u_n)^{-1} - (u_{n+1})^{-1}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite, notée L pour le reste de cet énoncé.

(g) On admet que $\dfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ tend vers L quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n.

(h) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

95. (CCINP 2019)

(a) Calculer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

(b) Calculer $I_n + I_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

96. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $P_n : x \mapsto -4 + x + x^2 + ... + x^n$.

(a) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.

(b) Calculer x_1 et x_2. Montrer que $x_5 < 1$.

(c) Déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que (x_n) est monotone puis convergente. On note ℓ sa limite.

(d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x_n)^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^{n+1} = 0$. En déduire ℓ.

(e) On pose $d_n = x_n - \ell$. Montrer que $d_n = \frac{(x_n)^{n+1}}{5}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nd_n = 0$.

(f) Montrer que $d_n \sim k\ell^{n+1}$, avec k à déterminer.

97. (Mines Télécom 2019)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2 - 3^{1/k})$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

(b) Déterminer sa limite.

(c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que u_n soit équivalent à $\dfrac{\alpha}{n^{\ln 3}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour la dernière question, on peut poser $v_n = \ln(n^{\ln(3)} u_n)$ *et prouver que la série de terme général* $v_n - v_{n-1}$ *converge.*

98. (CCINP 2019)

E_λ ensemble des suites de réels strictement positifs, vérifiant :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Notons :

si $n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ et $v_0 = 1$,

si $n \geqslant 2,\ w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ et $w_0 = w_1 = 1$.

(a) Montrer que $(v_n) \in E_\beta$.

(b) i. Montrer que $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{n\ln(n)} + o\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$.

ii. En déduire que $(w_n)_n \in E_\lambda$ pour un certain λ à préciser.

(c) i. Donner la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$.

ii. Donner la nature de $\sum w_n$.

(d) Soit $\lambda > -1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\lambda$. On pose $\beta = \frac{1-\lambda}{2}$.
Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
En déduire la nature de $\sum u_n$.

(e) Soit $\lambda < -1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\lambda$.
Déterminer la nature de $\sum u_n$.

(f) Que se passe-t-il pour $\lambda = -1$?

99. (TPE EIVP 2018)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$.
Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.
Indication : $n^2+3n+3 = 1+(n+1)(n+2)$.

100. (TPE-EIVP 2018)
f est une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, positive et croissante. On suppose de plus que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$.

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} f(k) \sim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)dx$.

(b) Soit $\alpha > 0$. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

(c) Soit $q > 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ et de $\int_0^n q^x dx$. Conclure.

101. (Mines Télécom 2018)
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right]^n$.

102. (TPE-EIVP 2018)
Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$

103. (CCP 2018)

(a) On étudie une série : montrer que $\sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1} - u_{2i}) = \sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k-1}u_k$.

(b) i. On étudie la série $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer qu'elle est convergente.

ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2k}}\right)$.

iii. Quelle identité obtient-on en faisant tendre p vers $+\infty$?

(c) i. On étudie $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que g_n est deux fois dérivable et que g_n' est croissante.

ii. A l'aide des accroissements finis, montrer que
$g_n(2\ell) - g_n(2\ell-1) \leqslant g_n(2\ell+1) - g_n(2\ell)$.

(d) Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

i. Montrer que $|R_n|$ est décroissante.

ii. En déduire la nature de $\sum R_n$.

(e) Donner la nature de $\sum |R_n|$.

104. (TPE-EIVP 2018)
Posons pour un entier naturel n : $u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+3n+3})$.
Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général u_n.
(Ind : utiliser l'identité $n^2+3n+3 = 1+(n+1)(n+2)$)

105. (CCP 2018)
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]-1,0\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

(a) Étudier les variations de $f : x \mapsto x + x^2$.Montrer que $f(\left]-1,0\right[) \subset \left]-1,0\right[$.

(b) Montrer que pour tout n, $u_n \in]-1,0[$ et que la suite (u_n) converge. Préciser sa limite α.

(c) Nature et somme (en fonction de u_0) de la série $\sum u_n^2$?

(d) Rayon de convergence de la série entière de $\sum u_n x^n$?

(e) Convergence de $\sum (-1)^n u_n$?

(f) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Montrer que la suite (a_n) converge et préciser sa limite L.

(g) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = L.$. En déduire un équivalent de u_n.

(h) Nature de $\sum u_n$?

106. (Mines-Télécom 2017)

(a) Enoncer la règle de d'Alembert pour les séries.

(b) $\sum \dfrac{an^n}{n!}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, est-elle convergente ?

107. (EIVP 2017)
Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n^2+3n+3}$, sachant que $n^2+3n+3 = (n+1)(n+2)+1$.
(On pourra utiliser $\tan(a-b)$.*)*

108. (CCP 2017)
On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles positives. Pour tout élément f de E, on définit la fonction $\phi(f)$ par $\phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}\, \mathrm{d}t$.
On note f_0 la fonction constante égale à 1 puis, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \phi(f_n)$.

(a) L'ensemble E est-il un espace vectoriel ?

(b) Pour toute f de E, montrer que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

(c) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n\, x^{\beta_n}$. On donnera des relations de récurrence et on exprimera β_n en fonction de n.

(d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par une constante strictement positive puis obtenir la minoration $\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leqslant \dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{4-2^{-n}}$.
En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge et exprimer sa limite.

(e) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une certaine fonction f et déterminer cette fonction. La convergence est-elle uniforme ?

109. (CCP 2017)

Soit E l'ensemble des fonctions continues à valeurs positives sur $[0,1]$ et ϕ l'application de E dans E qui à $f \in E$ associe $\phi(f)$ définie par $\phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$. On considère la suite (f_n) définie par $f_0 = 1$ et la relation de récurrence $f_{n+1} = \phi(f_n)$.

(a) E est-il un espace vectoriel ? Justifier.

(b) i. Soit $f \in E$. Montrer que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\phi(f)'$.

ii. ϕ est-elle injective ? surjective ?

(c) i. Montrer qu'il existe des suites (α_n), (β_n) telles que : $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ pour tout entier n et tout réel $x \in [0,1]$. Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n+2} \quad , \quad \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1$

ii. Calculer β_n en fonction de n.

(d) Montrer que la suite (α_n) est minorée par une constante strictement positive, puis que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leqslant \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{4-\frac{1}{2^n}}$.

En déduire que la suite (α_n) converge et donner sa limite.

(e) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer. La converge est-elle uniforme sur $[0,1]$?

110. (CCP 2016)

(a) Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

(b) Montrer que sa somme S vérifie $\dfrac{2}{3} < S < 1$ (on pourra étudier $S-1$ et $S-\dfrac{2}{3}$ comme séries alternées).

(c) Calculer $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 (-t)^k \mathrm{d}t$ et exprimer la somme partielle S_n à l'aide d'une intégrale. Retrouver la convergence de la série et calculer S.

(d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ (on pourra poser $t = \tan x$ ou intégrer par parties).

(e) On note w_n le reste d'ordre n de la série ; montrer que $\sum w_n$ converge et calculer sa somme.

111. (CCP 2016)

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) > 0$.

(b) On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln n$.

(c) Montrer que $\exists \alpha > 0$, $\dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\alpha}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge, puis que (a_n) converge.

(d) Montrer que $\ln(\sqrt{n}u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}a_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$ où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la nature de $\sum u_n$.

(e) Montrer que la série de terme général $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^{\lambda}}\right)$ avec $\lambda > 0$ converge vers v, puis que $v = 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

112. (CCP 2016)

(a) Justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}$ et montrer que $v_n \sim \dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq v_n$, en déduire la nature de $\sum u_n$.

(d) Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = -\frac{2}{1+t^3}$.

(e) Justifier la convergence de $\sum\left(-\dfrac{1}{1+t^3}\right)^n$ et calculer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

(f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3n(u_n - u_{n+1})$.

(g) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \alpha\pi$ où α est un réel à déterminer.

113. (Mines Télécom 2016)

(a) Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de la suite $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \arctan k$.

(b) Trouver un développement asymptotique à l'ordre 2, puis à l'ordre 3 de cette suite.

114. (Mines Télécom 2016)

Calculer la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$.(On pourra utiliser une comparaison avec une intégrale)

115. (CCP 2016)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et une suite de réels u_n strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

(a) Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.

(b) On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et pour tout n, $v_n = n^{\alpha}u_n$; montrer que $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)$ converge. Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{\alpha}}$ au voisinage de $+\infty$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

(c) On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que sa somme vaut $u_0 \frac{b-1}{b-1-a}$.
On pourra calculer la somme partielle d'indice N de la série de terme général $n(u_{n+1} - u_n) + bu_{n+1} - au_n$.

116. (CCP 2015)

Soit n appartient à N*, a un réel fixé On considère $Un = (a - (1/n))^(2n)$
Donner la nature de la série de terme général Un.

117. (Mines Télécom 2015)

Trouver la nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{-n^2}$.

118. (CCP 2015)

(a) Montrer que la suite de terme général $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ est décroissante.

(b) On admet que $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}a_n$.
Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante.

(c) Sachant que $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$, montrer que $a_{n+1} \sim a_n$ au voisinage de l'infini.

(d) Prouvez qu'il existe $K > 0$ tel que $a_n \sim \dfrac{K}{n^{3/2}}$.

(e) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\mathrm{d}t$ et que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t$.

(f) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n = \frac{\pi}{2}$. Montrer que $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}a_n$.

119. (CCP 2015)

Soient $d_0 = 1$, $d_1 = \dfrac{1}{2}$ et $d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \sqrt{\frac{1}{n}} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{n}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

(a) Calculer d_2 et d_3 puis montrer que, pour $n \geq 2$, $(n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.

(b) Montrer que $|d_n| \leq 1$. Que dire du rayon de convergence de $S(x) = \sum d_n x^{n+1}$?

(c) Donner l'équation vérifiée par $S(x)$ puis montrer que $S(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

(d) Exprimer d_n en fonction de n.

120. (CCP 2015)

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - n\ln(x)$.

(a) Étudier ses variations et montrer que l'équation $(E_n) : x = n\ln(x)$ admet 2 solutions $U_n < V_n$. Montrer que V_n tend vers $+\infty$.

(b) Montrer, pour $n \geq 3$, que $\ln n = \ln V_n - \ln(\ln V_n)$ et qu'un équivalent de V_n en $+\infty$ est $n\ln n$.

(c) Soit $a > 1$; étudier la série de terme général $\dfrac{1}{V_n^a}$ et montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ ne converge pas.

(d) Soit $a < 1$; montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{V_n^a}$ diverge.

(e) Montrer que $1 \leq U_n \leq e$ et étudier la suite (U_n).

(f) Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de l'infini.

121. (CCP 2015)

Limite de la suite de terme général $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Nature de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

122. (CCP 2015)

Soient deux réels a et b tels que $1 + a < b$ et une suite de réels u_n positifs tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.

(a) Donner, sous sa forme la plus simple possible, un équivalent de $\ln \dfrac{n+a}{n+b}$ au voisinage de $+\infty$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = -\infty$ et en déduire que (u_n) tend vers 0.

(c) On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et $v_n = n^\alpha u_n$; montrer que $\sum\limits_{k\geq 0} \ln \dfrac{v_{k+1}}{v_k}$ converge.

(d) Montrer qu'il existe un réel A tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.

(e) Étudier la convergence de $\sum u_n$.

123. (CCP 2015)

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$.

(b) On pose $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_{n+2} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$; donner l'expression de x_n en fonction de n et trouver sa limite.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit U_n par $U_{n+2} \leq \dfrac{U_n + U_{n+1}}{2}$ et $V_n = \max(U_n, U_{n+1})$.

(d) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $U_{p+2} \leq V_p$.

(e) Montrer que si $U_{p+1} \leq U_{p+2}$ alors $V_{p+1} \leq V_p$ et en déduire que (V_n) est décroissante.

(f) On suppose que (V_n) diverge ; qu'en déduire pour (U_n) ?

(g) On suppose que (U_n) est minorée ; qu'en déduire pour (V_n) ?

(h) On suppose que (U_n) est minorée , on note l la limite de (V_n) et on admet que $2l - V_n \leq U_{n+1}$; montrer que (U_n) converge et donner sa limite.

(i) Montrer par l'absurde que $2l - V_n \leq U_{n+1}$.

124. (TPE-EIVP 2015)

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(n+k)\right)^{1/n}$.

125. (CCP 2015)

(a) On donne deux suites, de terme général respectif $u_n = \big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\big)^n$ et $v_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

(b) Montrer que $\sum v_n$ converge.

(c) Calculer $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(d) Montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $2\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}(\sqrt{n} - 1)$.

(e) On note $R_n = \sum_{p\geq n+1} v_p$; montrer que $I_{n+1} \leq R_n \leq I_n$ et en déduire un équivalent de R_n en $+\infty$.

(f) Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum_{p\geq n+1} u_p \sim \frac{R_n}{\sqrt{e}}$ en $+\infty$.

126. (CCP 2015)

(a) Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est monotone.

(b) Donner un équivalent de u_n.

127. (CCP 2015)

(a) Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$ existe.

(b) On admet que $I_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{1+4(n+1)^2} I_n$.

(c) Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 0} i_n x^n$ est définie sur $]-1,1[$.

(d) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

(e) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{(n+1)}{n+2}$.

(f) Montrer que $I_n = o(\frac{1}{n+1})$ et étudier $\sum I_n$.

(g) Donner la nature de $\sum(-1)^n I_n$ puis montrer que $I_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{1+4(n+1)^2} I_n$.

128. (CCP 2015)

(a) On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $u_{n+1} = \sin u_n$ et $v_n = \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,\frac{\pi}{2}[$ puis que (u_n) converge et donner sa limite.

(c) Montrer que (v_n) est bien définie et converge vers 0.

(d) Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \lambda u_n^3$ quand n tend vers $+\infty$ et donner la nature de $\sum u_n^3$.

(e) Montrer que $\sum u_n^2$ diverge (on pourra étudier $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$).

(f) Montrer, à l'aide d'un encadrement de v_n, que $u_n \sim v_n$ puis donner le rayon de convergence R de $\sum v_n x^n$.

(g) Donner la nature de $\sum v_n R^n$ et $\sum v_n(-R)^n$.

129. (CCP 2015)

(a) On donne $u_0 \in]-1,0[$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

(b) En étudiant $f(x) = x + x^2$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1,0[$.

(c) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(d) Montrer que $\sum u_n$ converge et exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de u_0.

(e) Montrer que le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ vaut 1.

(f) Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ converge.

(g) Montrer que la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$ converge vers une limite l à préciser.

(h) On admet que $\dfrac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} a_p$ tend vers l ; déterminer un équivalent de u_n et en déduire la nature de $\sum u_n$. Montrer que $\dfrac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} a_p$ tend vers l.

130. (CCP 2015)

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de $f_n(x) = x - n\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $\forall n \geq 3$, l'équation $x = n\ln x$ admet deux solutions $u_n < v_n$.

(c) Montrer que (v_n) tend vers $+\infty$ et que $\ln n = \ln v_n - \ln(\ln v_n)$.

(d) En déduire que $v_n \sim n\ln n$ en l'infini.

(e) Soit $a > 1$, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{v_n^a}$ converge.

(f) Montrer la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ et en déduire la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{v_n^a}$ pour $a \geq 1$.

(g) Montrer que $1 \leq u_n \leq \mathrm{e}$, que $\forall n \geq 3$, la suite (u_n) converge et indiquer sa limite.

(h) Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$ au voisinage de l'infini.

131. (CCP 2015)

(a) Si (u_n) est une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge, on note $R_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$ pour $\alpha > 0$.

(b) On choisit $u_n = \dfrac{1}{2^n}$; montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer R_n.

(c) Donner la nature de $\sum v_n$ en fonction de α.

(d) Dans le cas général, exprimer v_n en fonction de R_n, R_{n-1} et α.

(e) Donner la nature de $\sum v_n$ pour $\alpha = 1$ (on pourra poser $w_n = \ln(1 - v_n)$).

(f) Montrer que, pour $\alpha > 1$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $R_{n-1}^{\alpha} \leq R_{n-1}$ et en déduire la convergence de $\sum v_n$.

Donner la nature de $\sum v_n$ pour $0 < \alpha < 1$ (on pourra étudier $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$).

132. (CCP 2015)

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$.

133. (CCP 2015)

(a) On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{\frac{1}{n}}$; on pose $x_k = u_k^{k-1}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

(b) Calculer $x_{k+1} - x_k$ et montrer que $\forall n \geq 1$, $x_n = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{x_k} \leq 3$.

(d) Exprimer $\ln(u_n)$ en fonction de n et montrer que, quand n tend vers $+\infty$, $\ln(u_n) \sim \dfrac{2(\ln n)^r}{n^s}$ où r et s sont des réels à déterminer.

(e) Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(u_n)$?

Manque deux questions.

134. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\forall t \geq -1$, $\ln(1+t) \leq t$.

(b) Pour $n \geq 2$ et $a > 0$, on note $u_n(a) = \displaystyle\prod_{p=2}^{n} \big(1 - \frac{1}{p^a}\big)$.

(c) Étudier la suite pour $a = 2$; montrer qu'il existe un réel μ tel que $u_n(2) = \mu \dfrac{n+1}{n}$ et en déduire la limite de la suite. Qu'évoque ce résultat ?

(d) Étudier la convergence de la suite dans le cas général.

(e) Donner la nature de $\sum \ln\big(1 - \frac{1}{p^a}\big)$ et en déduire la limite de $\big(u_n(a)\big)$.

Manque questions faisant intervenir $F_p(a)$ dont le candidat ne se souvient pas.

135. (ENSIIE 2015)

Étudier $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3n+1}$.

136. (Navale 2015)

(a) On note $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$; trouver une relation entre u_{n+2} et u_n.

(b) Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

(c) Donner la nature des séries de terme général $(-1)^n u_n$ et $\dfrac{u_n}{n^\alpha}$ suivant α.

137. (Mines Télécom 2015)

Nature, en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}$, de $\sum(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1})^n$.

138. (Mines Télécom 2015)

Nature de la série de terme général $\sin(2 \operatorname{Arctan} n)$.

139. (Mines Télécom 2015)

(a) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$.

(b) Montrer que $\exists z \in \mathbb{C}$, $S_n \leq \left|\dfrac{2}{1-z}\right|$.

(c) Donner les variations de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ sur $]2, +\infty[$.

(d) En remarquant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, exprimer $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k+1)S_k$ en fonction de $\sum_{k=2}^{n-1} \big(f(k+1) - f(k)\big)S_k$.

(e) Conclure.

140. (Mines Télécom 2015)
Étudier $\sum \dfrac{1}{\ln n \ln(\operatorname{ch} n)}$.

III.5 Suites et séries de fonctions

141. (Mines Télécom 2023) (Lowell)
Soit (f_n) définie sur $[0, +\infty[$ par
$\forall x \in [0, +\infty[, f_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}\mathrm{d}t$.

(a) Calculer f_1.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Soit $n \geq 1$, $x \geq 0$. Montrer que $0 \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

(d) En déduire la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

142. (CCINP 2023) (Sabrine)
Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$.

(a) Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $]0, \pi[$.

(b) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$.

143. (CCINP 2023)

(a) Pour $x \in]-1, 1[$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$.

144. (CCINP 2023)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n!}\cos(nx)$ et $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Donner le DSE de exp et son rayon de convergence.

(b) Montrer que U est définie sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (sans calculer U).

(d) Montrer que $U(x) = \exp(\alpha\cos(x))\cos(\alpha\sin(x))$.

(e) On pose $V(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha^n\cos^2(nx)}{n!}$.

Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer V.

(f) On pose $I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)U(x)dx$. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}I_n=0$.

(g) Calculer I_n.

145. (CCINP 2023)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}\end{array}.$$

(a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$.

(b) i. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

ii. Montrer que, pour tout $a>0$, la série converge normalement sur $[a,+\infty[$. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) i. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ R_n(x)-R_{2n}(x)\geqslant\dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$.

ii. En déduire que $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

(d) On admet (ε) : $\forall x>0\quad 2\arctan\dfrac{1}{x}\leqslant S(x)\leqslant 2\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1+x^2}$. Montrer que S n'est pas continue en 0.

(e) Démontrer (ε).

146. (CCINP 2023)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée f.

(b) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

147. (CCINP 2022)

Etudier les modes de convergence de $\sum\dfrac{\sin(nx)}{n!}$. Calculer sa somme.

148. (CCINP 2022)

Soit f_0 continue sur $\mathbb{R}$. On définit par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

(a) i. Donner le rayon de convergence et la valeur de la somme de $\sum\dfrac{x^n}{n!}$.

ii. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de f_1'.

(b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On admet que $\forall a\in\mathbb{R}_+,\exists K\in\mathbb{R}_+^*,\forall x\in[-a,a],|f_n(x)|\leq K\dfrac{|x|^n}{n!}\qquad(\star)$.

(c) Montrer que $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que $F' - F = f_0$.

(e) Montrer que $F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t)\mathrm{d}t$.

(f) *Bonus :* Montrer $(\star)$.

149. (CCINP 2022)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

On note $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(a) Enoncer le théorème spécial des séries alternées avec le signe et la majoration du reste.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) i. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x+1}$.

En déduire que $\forall x > 0, 2f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x+1)(n+x)}$.

ii. Montrer que $\forall x > 0,\ \left| f(x) - \dfrac{1}{2x} \right| \leqslant \dfrac{1}{2(x+1)x}$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

(d) Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x}$ en 0^+.

150. (CCINP 2022)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx)}$.

On pose, lorsque cela est défini, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

(c) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

(d) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

(e) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(f) Pour tout $x > 0$, prouver la minoration $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$.

Indication : utiliser la méthode des rectangles.

(g) En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

151. (CCINP 2022)

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n(x) = \ln\left(\frac{n}{n+1} + x\right),\ u(x) = \ln(1+x)$ et $v_n = u_n - u$.

(a) Montrer que u_n converge uniformément vers u sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Étudier la convergence de la série $\sum v_n$.

152. (CCINP 2021)

On considère une application $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.

(b) i. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f_1'.

ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.

On admet provisoirement la propriété suivante :

$$\forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a,a], |f_n(x)| \leq K\frac{|x|^n}{n!}.$$

(c) i. Soit $F : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer que $F' - F = f_0$.

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

(e) Prouver la propriété admise.

153. (CCINP 2021)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0 \ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Énoncer le critère spécial des séries alternées avec majoration et signe du reste.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) i. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x+1}$.

ii. En déduire que $\forall x > 0,\ 2f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+x+1)(n+x)}$.

iii. Montrer que $\left|f(x) - \dfrac{1}{2x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2(x+1)x}$.

En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

(d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

(e) Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

154. (Mines Télécom 2021)

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\frac{1}{nx} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[\alpha,\beta]$?

(b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

155. (CCINP 2021)

On considère une application $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.

(b) i. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f_1'.

ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.

On admet provisoirement la propriété suivante :

$\forall a > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-a,a],\ \ |f_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$

(c) i. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer que $F' - F = f_0$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

(e) Prouver la propriété admise.

156. (CCINP 2021)Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x t \cos^n t\mathrm{d}t.$

(a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale $J_n(x)$ est-elle définie ?

(b) i. Calculer $J_n(1)$.

ii. Soit x tel que $-1 < x \leq 1$. Montrer que $J_n(x) \geq J_n(1)$. En déduire la nature de $\sum J_n(x)$, quand $-1 < x \leq 1$.

(c) i. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $b > 0$, la fonction $f : t \mapsto \ln(\sin t)\sin^b t \cos^n t$ est intégrable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

ii. Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Soit $g_x(t) = \dfrac{\sin^x t}{1-\cos t}$ où $x > 1$. Montrer que g_x est intégrable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ et calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_2(t)\mathrm{d}t.$

(e) En déduire la nature de $\sum J_n(x)$.

157. (CCINP 2021)

Pour $x \in I =]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

(a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(b) Déterminer les limites de f en -1 et $+\infty$.

158. (CCINP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx + x\sqrt{x}}$.

(a) Montrer que les f_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

159. (TPE 2019)

Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^n \sqrt{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}dx$, à l'aide d'un changement de variable.

160. (Navale 2019)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_n : x \mapsto n^\alpha x^2 e^{-nx}$ et $g_n : x \mapsto n^\alpha \sin(x)e^{-nx}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Étudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) et (g_n).

161. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}$.
Étudier la convergence simple/uniforme/normale sur $\mathbb{R}$ de $\sum f_n$.

162. (CCINP 2019)

Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$

163. (CCINP 2019)

On note (a_n) une suite décroissante et positive et on pose $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq u_n(x) \leq a_1 x^n(1-x)$ et en déduire que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

(b) Que vaut $\sum u_n$ si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$? Si $a_n = \frac{1}{n}$? Si $a_n = \frac{1}{2^n n!}$?

(c) On note $x_n = \frac{n}{n+1}$; trouver un équivalent de $x_n^n(1-x_n)$.

(d) Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

(e) Montrer que $0 \leq \displaystyle\sum_{k\geq n+1} a_k x^k(1-x) \leq a_{n+1}$.

(f) À quelle condition, nécessaire et suffisante sur (a_n), $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

164. (CCINP 2019)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que la série de fonctions ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que $f-1$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\int_0^{+\infty}(f-1)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(d) Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$. Déterminer un équivalent de f en 0^+. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(f) Démontrer l'encadrement admis dans la question précédente.

165. (Mines Télécom 2019)

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{3n+1}\mathrm{d}x$.

(b) Nature de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+2}$ et calcul de la somme.

166. (Mines Télécom 2019)

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

167. (CCINP 2019)

Soit $t \in \mathbf{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{nt})$.

   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   (b) Montrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \ln(2)$.

168. (CCINP 2019)

E est l'ensemble des applications croissantes de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x}$ avec $f(1) = 0$.
On pose $u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

   (a) Montrer que pour $x > 0$, $u_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$ quand $n \to +\infty$.
   Montrer que $\sum u_n(x)$ converge.
   On pose alors $u(x) = -\frac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x > 0$.

   (b) i. Montrer que u est croissante en revenant à la définition.
   ii. Montrer que $u \in E$.

   (c) i. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   ii. Soit $x \in]0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f, g \in E$. Montrer les inégalités :
   $f(n) - g(n+1) \leqslant f(x+n) - g(x+n) \leqslant f(n+1) - g(n)$.

   (d) Avec les mêmes notations que précédemment, on pose $\delta = f - g$.
   i. Montrer que $\delta(x+n) = \delta(x)$.
   En utilisant les inégalités précédentes, préciser la limite de la suite $(\delta(x+n))_n$
   ii. Montrer que $f = g$.
   Que peut-on en conclure sur E ?

169. (CCP 2018)

   (a) Soit $x \in [0,1]$. Donner les variations sur $[0,1]$ de $g_x(t) = t + \dfrac{x-t^2}{2}$.

   (b) Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$ est dans l'intervalle $[0,1]$, qu'elle est décroissante et en déduire qu'elle converge vers une limite à déterminer.

   (c) On donne $P_0(x) = 1$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x - P_n(x)^2}{2}$. Montrer que P_n est dérivable, que $P'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} + P'_n(x)(1 - P_n(x))$ puis que $P_n(x)$ est croissante.

   (d) Montrer que $P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n(x)+\sqrt{x}}{2}\right)$ et en déduire par récurrence que $0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0)$.

   (e) Montrer que (P_n) converge uniformément vers une fonction à déterminer.

170. (CCP 2018)

Soit : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$

(a) Soit $n > 0$, montrer que I_n existe.
(b) Montrer que $(I_n)_{n>0}$ converge.

171. (CCP 2018)

On définit pour $x > 0$: $G(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$.

(a) Sur quel intervalle G est-elle définie ? Sur quel intervalle G est-elle continue ?
(b) Montrer que G est de classe C^1 et calculer $G'(x)$.

172. (CCP 2018)

E est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une suite de fonctions par $f_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

(a) Rayon de convergence, valeur de la somme de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$.
(b) Montrer que f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n.
(c) On admet la propriété suivante :
$(*) \forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}^{+*} \,/\, \forall x \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) \leq K \frac{|x|^n}{n!}$.
Montrer que $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $F' - F = f_0$.
(d) Montrer que F est la fonction $x \mapsto e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t}dt$.
(e) Démontrer la propriété $(*)$.

173. (CCP 2018)

f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, positive, croissante de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'on définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par :
$u_0 = f$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $u_{n+1}(x) = \int_0^1 u_n(xt)\,\mathrm{d}t$.
(b) Montrer que pour tout n la fonction u_n est croissante sur $[0, 1]$.
(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$.
(d) Montrer que la suite (u_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction notée L. Montrer que L est croissante.
(e) Montrer que pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et que pour $n \geqslant 1$,
$u_n'(x) = \int_0^1 t u_{n-1}'(xt)\,\mathrm{d}t$.
(f) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et $x > 0$, $u_n'(x) = \dfrac{u_{n-1}(x) - u_n(x)}{x}$.
(g) Montrer qu'on a $x \sum_{k=1}^{N} u_k'(x) \leqslant f(x)$. Que peut-on en déduire pour la série de fonctions $\sum u_n'$?
(h) Montrer que L est une fonction constante.

174. (Mines Télécom 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1 + n^2x^2}$ et on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

(a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
(b) La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? Pour tout a dans $]0, 1]$, montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.
(c) Montrer que la suite (u_n) converge.

(d) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. On pourra effectuer un changement de variable.

175. (CCP 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

(a) Enoncer le théorème des séries alternées dans sa totalité.

(b) Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(c) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k+1}$.

(d) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $2f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.

(e) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(f) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

(g) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

176. (Mines-Télécom 2017)

(a) Montrer que $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

177. (EIVP 2017)

(a) Domaine de définition D de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx^2}$

(b) Y a-t-il convergence normale sur D ?

(c) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

178. (CCP 2017)

Existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

179. (CCP 2017)

Convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = n^a x^n(1-x)$.

180. (CCP 2017)

Soit $f_k(x) = \dfrac{k^2}{k^2+1}xe^{-kx}$. Montrer que $\sum f_k$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. $\sum f_k$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

181. (CCP 2017)

Étudier la série de fonctions $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

182. (CCP 2017)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente, et $(b_n)_n$ une suite d'entiers naturels.

Notons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n cos(2\pi b_n x)$.

(a) Montrer que la série définissant f converge normalement sur $[0,1]$.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $[-1,1]$.

(c) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

(d) Montrer que $S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(\frac{k}{n})$ converge et déterminer sa limite.

(e) Montrer que $\sum_{k=0}^{N-1} \exp(2ib_n \frac{k}{N})$ vaut N si N divise b_n et 0 sinon.

Notons $I_n = \{n \in \mathbb{N}^*/N \mid b_n\}$.

Montrer que $S_N = \sum_{n\in I_N} a_n$.

(f) On choisit $b_n = n!$ et $a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Montrer que $\{n \in \mathbb{N}^*/n \geq N\} \subset I_n$ puis que $NS_N \to +\infty$

183. (CCP 2017)

On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Rappeler le critère des séries alternées avec la majoration du reste et son signe.

(b) i. f est-elle bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

ii. Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k+1}$.

(c) Montrer que : $\forall x > 0,\ 2f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$

(d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$

(e) Déterminer un équivalent de f en 0^+.

(f) Montrer que : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

184. (Mines-Télécom 2017)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1/\mathrm{ch}(x^n)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) La convergence est-elle uniforme ?

185. (TPE-EIVP 2017)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx^2}$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Y-a-t-il convergence normale sur $\mathcal{D}_f$?

(c) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

186. (CCP 2017)

Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

(a) Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

(c) Montrer que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. [Hors programme PC ?]

187. (CCP 2017)

Soit a un réel, x dans $[0,1]$ et f_n définie pour $n \geqslant 1$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

(a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

(b) Étudier la convergence uniforme.

188. (Mines Télécom 2017)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

(b) La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$? Soit $a \in]0,1]$. Montrer que la convergence de la suite est uniforme sur $[a,1]$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(d) Déterminer un équivalent de u_n . (*On pourra effectuer un changement de variable*).

189. (TPE-EIVP 2016)

Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

190. (EIVP 2016)

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+n\alpha}$ où $\alpha > 0$ converge et que sa somme vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

191. (EIVP 2016)

On donne $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$; montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge.

Montrer que la suite de terme général nI_n converge et donner sa limite.

192. (Mines Télécom 2016)

Montrer que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n} x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

193. (ENSEA 2016)

Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = x^2 x$ si $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n}$, $f_n(x) = 1 - nx$ si $\dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ partout ailleurs.

Donner, si elle existe, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

194. (Mines Télécom 2016)

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

(a) Montrer que $S(1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que pour $x > 0 : xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

195. (Mines Télécom 2016)
Pour $n > 0$ et x réel on pose $u_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$.
   (a) Déterminer le domaine de convergence simple de $\sum u_n$.
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme.

196. (EIVP 2016)
Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\mathrm{d}x$.

197. (Mines Télécom 2015)
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\exp(-x)}{1-\exp(-x)}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

198. (CCP 2015)
Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Mq I_n existe.
   (b) Mq la suite (I_n) converge.

199. (Mines Télécom 2015)
Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)+\exp(-nx)}{1+nx^4+n^2}$ est définie et continue sur son ensemble de définition.

200. (Mines Télécom 2015)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n\colon x \mapsto \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$, et $S\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
Calculer $S'(1)$.

201. (Mines Télécom 2015)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(t) = \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n$.

202. (Mines Télécom 2015)
Soit la suite de fonctions (f_n) définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de terme général f_n.
   (b) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de terme général f_n.

203. (Mines Télécom 2015)
On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$.
   (a) Montrer que $\int_0^1 \mathrm{d}t/\sqrt{-2\ln t} = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ en posant $x = \sqrt{-\ln t}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier le changement de variable $x = (\cos t)^n$ dans l'intégrale $w_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n\colon t \mapsto 1/\sqrt{n(t^{-2/n}-1)}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{-2\ln t}$, et en déduire, grâce au théorème de convergence dominée, que $w_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.

204. (CCP 2015)
Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

205. (CCP 2015)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\mathrm{d}x$; trouver une relation entre I_n et I_{n+2}, puis montrer que $\sum I_n$ converge et calculer sa somme.

206. (CCP 2015)

(a) Pour $n \geq 2$, étudier les variations de $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner ses limites aux bornes.

(b) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

(c) $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $]1, +\infty[$? Y a-t-il convergence normale ?

(d) Étudier les variations et donner les limites de $S = \sum f_n$ sur $]1, +\infty[$.

(e) Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(f) Nature, pour $a \geq 2$, de $\sum I_n(a)$ avec $I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

207. (TPE-EIVP 2015)

Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

208. (CCP 2015)

Existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x)^n}\,\mathrm{d}x$; la suite (I_n) converge-t-elle ?

209. (CCP 2015)

(a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ existe.

(b) Donner les développements en série entière de $\dfrac{1}{1+x}$ et $\dfrac{1}{1-x}$ et en déduire l'expression de I comme une somme.

(c) Rappeler les théorèmes d'interversion des signes $\sum$ et $\int$.

210. (CCP 2015)

Montrer que $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx + x^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

211. (TPE-EIVP 2015)

(a) Étudier les convergences simple et uniforme de la série de terme général $u_n(t) = (-1)^n \ln\big(1 + \dfrac{t^2}{n(1+t^2)}\big)$ pour $n \geq 1$.

(b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^n \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$; montrer que $S_{2p} = \ln\Big(\dfrac{2p+1}{2^{2p}}\tbinom{2p}{p}^2\Big)$.

(c) Montrer que $\tbinom{2p}{p}^2 \dfrac{1}{2^2 p} \sim \dfrac{??}{\sqrt{2\pi}}$ en $+\infty$.

(d) Calculer la somme de S_{2p} et en déduire celle de S_n.

212. (Mines Télécom 2015)
Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x}{1+(nx\ln n)^2}$ converge absolument mais pas normalement. Y a-t-il convergence uniforme ? Montrer que la somme est nulle.

213. (Mines Télécom 2015)
Montrer que $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donner $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

214. (Mines Télécom 2015)
Cours : énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale pour les séries de fonctions, sur un intervalle quelconque.

III.6 Séries entières

215. (Mines Télécom 2023)
On pose, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$.
   (a) Préciser le rayon de convergence de f.
   (b) Montrer que f est solution de
   $(E) : (1-x)y'(x) = (p+1)y(x)$
   sur son intervalle ouvert de convergence.
   (c) Donner une expression de f.

216. (Mines Télécom 2022)
Soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t$
   (a) Exprimer I_n comme somme d'une série.
   (b) Trouver un équivalent de I_n.

217. (Mines Télécom 2022)
   (a) Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$.
   (b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.
   Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum R_n x^n$.

218. (Mines Télécom 2022)
Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \ln(x^2+4x+3)$.

219. (ENSEA Cergy 2022)
   (a) Donner le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.
   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
   (b) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et l'intervalle où il est valable.

(c) Déterminer une expression de $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

220. (CCINP 2022)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n!}$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ et calculer sa somme.

221. (Mines Télécom 2022)

On considère le problème de Cauchy suivant, noté (S)

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, noté R, est strictement positif.

On définit alors la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de $]-R, R[$ dans $\mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est solution du problème (S) sur $]-R, R[$. Trouver alors une relation de récurrence sur les coefficients a_n.

(b) Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ à l'aide de certains coefficients a_k.

(c) Sous la même hypothèse qu'à la question 1, trouver une expression des coefficients a_n et en déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

(d) (Question extrapolée par le transcripteur) Effectuer la réciproque.

222. (Mines Télécom 2021)

$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

(a) Trouver le rayon de convergence de cette série entière, que l'on notera R.

(b) Montrer que S vérifie, pour $x \in]-R, R[$, $(1-4x)S'(x) - 2S(x) = 0$.

(c) Trouver l'expression complète de S.

223. (CCINP 2021)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Montrer que F est impaire et croissante.

ii. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ est finie.

(c) Montrer que F admet un développement en série entière de la forme

$F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1} a_n$. On précisera a_n et le rayon de convergence.

(d) Exprimer $F(x) + F(\dfrac{1}{x})$ en fonction de $F(1)$.

(e) *Question manquante.*

224. (CCINP 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\mathrm{d}x$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

(b) Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ converge.

(c) i. Montrer que, pour $N > 0$, $\sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x}\mathrm{d}x - v_N$,

où $v_N = \int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}\sin(\pi x)}{1+x}\mathrm{d}x$.

ii. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x}\mathrm{d}x$.

(d) Déterminer a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a - b(n+2)(n+1)u_n$.

(e) Donner le domaine de définition de : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

225. (CCINP 2021)
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \ln n\, x^n$.

226. (Mines Télécom 2021)
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer l'existence du développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$.

(b) Donner ce développement en série entière, et déterminer son rayon de convergence.

227. (ENSEA 2021)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}\, u_n$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) On pose $v_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe a tel que $\ln v_n = \dfrac{a}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

(c) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$.

(d) Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ admet pour ensemble de définition $[-1, 1]$.

228. (CCINP 2019)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n}$.

229. (CCINP 2019)
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} x^n$.

230. (CCINP 2019)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $I_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.

(a) Discuter l'existence de I_n. Calculer I_0 et I_1.

(b) i. Étudier les variations de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1}+(n+1)I_n = e^2$.

(c) i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.

ii. Préciser la nature de $\sum I_n$ et $\sum(-1)^n I_n$.

(d) Donner le rayon de convergence de $f(x)$.

(e) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$ et on pose : $\forall t \in [1, e],\ f_n(t) = t(\ln(t))^n x^n$.

i. Montrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[1, e]$.

ii. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme d'intégrale.

231. (CCINP 2019)

On considère $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\ x^n$ et $\mathcal{D}$ son ensemble de définition.

(a) Montrer que $]-1, 1[\subset \mathcal{D}$.

(b) i. Montrer que $]-1, 1[= \mathcal{D}$.

ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ converge.

(c) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$ est continue sur $[-1, 1]$.

(d) Prouver l'existence de $L \in \mathbb{R}$ tel que $(1 - x)S(x) = -x\ln(1 - x) + L + o(1)$ au voisinage de 1.

(e) Que peut-on dire de $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x$?

232. (Mines Télécom 2019)

(a) Montrer que, si $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de $4y'' + 2y' + y = 0$, alors

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}.$$

(b) Trouver, sans utiliser le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $y(x)$. Que peut-on en conclure ?

(c) Montrer que $a_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ et donner les solutions développables en série entière de l'équation sur $\mathbb{R}_+$, à l'aide des développements en série entière connus.

(d) Montrer que $\sin\sqrt{x}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

233. (CCINP 2019)

On pose $U_0 = 1$, $U_{n+1} = (n+1)U_n + (-1)^{n+1}$, $V_n = \dfrac{U_n}{n!}$.

(a) Calculer V_0, V_1, V_2, V_3 puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et n.

(b) Montrer que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite.

(c) On note $S(x)$ la somme de la série $\sum V_n x^n$, calculer son rayon de convergence.

(d) Déterminer une équation différentielle dont S est solution.

(e) Montrer que $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera et exprimer son développement en série entière en fonction de V_n.

(f) Sur quel intervalle f est-elle égale à la somme de la série trouvée ?

234. (Mines Télécom 2019)

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k}$.

(a) Nature de f.

(b) Étude de la continuité de f.

(c) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
(d) Résoudre $xy'(x)+y(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
(e) Donner les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

235. (Mines Télécom 2019)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif.
Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini.

236. (CCINP 2019)
Soit $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et r un réel tel que $|z|<r<R$. On note $I(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}f(re^{it})}{re^{it}-z}dt$.

(a) Montrer que $re^{it}-z$ ne s'annule pas pour tout t réel.
(b) Montrer que $I(r)$ existe.
(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n e^{-int}}{r^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n e^{-int}}{r^n} = \frac{re^{it}}{re^{it}-z}$.
(d) i. Montrer que $I(r)=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)dt$, avec $u_n(t)=\sum_{k=0}^{n} z^k a_{n-k} r^{n-2k} e^{i(n-2k)t}$ (on pourra remarquer que $u_n=\sum_{k=0}^{n} v_k w_{n-k}$ avec $v_k=\frac{z^k}{r^k e^{ikt}}$ et $w_k=a_k e^{ikt} r^k$).
ii. Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0,2\pi]$.
iii. Calculer $\int_0^{2\pi} u_n(t)dt$ et en déduire que $I(r)=2\pi f(z)$.

237. (Mines Télécom 2019)
Ensemble de définition de la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} x^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$?

238. (CCINP 2019)
On pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

(a) Rayon de convergence ? On le note R.
(b) Pour tout x dans $]-R,R[$, prouver la relation $(1-4x)S'(x)-2S(x)=0$.
(c) En déduire une expression de $S(x)$.

239. (CCINP 2019)
Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n}$.

240. (CCINP 2019)
On considère $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\ x^n$ et $\mathcal{D}$ son ensemble de définition.

(a) Montrer que $]-1,1[\subset \mathcal{D}$.
(b) i. Montrer que $]-1,1[=\mathcal{D}$.
ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)$ converge.
(c) Montrer que $x\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ est continu sur $[-1,1]$.

(d) Prouver l'existence de $L \in \mathbb{R}$ tel que
$(1-x)S(x) = -x\ln(1-x) + L + o(1)$ au voisinage de 1.

(e) Que peut-on dire de $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x$?

241. (CCP 2018)

Rayon de convergence et somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n$

242. (CCP 2018)

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n$

243. (Mines Télécom 2018)

On définit f par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est développable en série entière.

(b) Montrer que f est solution d'une ED linéaire d'ordre 1.

(c) Donner le développement en série entière de f.

244. (Mines Télécom 2018)

Calculer la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \sum_{k=0}^n U_k U_{n-k}$.
On posera $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n$ *pour* $x \in \left]-R, R\right[$.

245. (CCP 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

(c) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, obtenir une relation de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - v_N$ en précisant l'expression de v_N.

(d) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

(e) Trouver deux constantes a et b telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a + b(n+2)(n+1)u_n$.

(f) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n$.

246. (CCP 2018)

On considère la série entière $\displaystyle\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^n$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de cette série entière.

247. (Mines-Télécom 2017)

On donne $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)}u_n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq n+1$ et en déduire le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

(b) Montrer que sa somme S vérifie $(2-x)S'(x) - 2S(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$.

248. (EIVP 2017)

On donne $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.

(a) Montrer que $1 \leq a_n \leq n^2$.

(b) Donner le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$.

(c) Montrer que, sur $]-R, R[$, sa somme S vérifie $(1-x)y' - (1+2x)y = 1+2x$.

(d) Trouver une expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

249. (CCP 2017)

On donne f_0 continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on pose $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

(a) Donner le rayon de convergence et la somme de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.

(b) Montrer que f_1 est $\mathcal{C}^1$ et calculer f_1'. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.

(c) On admet que $(*)$: $\forall a > 0, \exists K \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |x| \leq a \Rightarrow |f_n(x)| \leq \dfrac{K|x|^n}{n!}$.

Montrer que $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que $F' - F = f_0$ et que $F(x) = e^x \displaystyle\int_0^x f_n(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

(e) Montrer la propriété $(*)$.

250. (CCP 2017) Convergence et somme de $\sum \mathrm{ch}(n)x^n$.

251. (CCP 2017)

On considère la suite donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$.

(a) Montrer que cette suite converge.

(b) Soit $v_n = (\frac{n+1}{n})^{3/2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Que peut-on conclure ?

(c) Montrer qu'il existe une constante C telle que $u_n \sim C\frac{1}{n^{3/2}}$.

(d) Notons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que S est définie sur $[-1, 1]$.

(e) Déterminer une équation différentielle du 1er ordre vérifiée par S.

(f) Donner une expression de $S(x)$ sur $]0, 1]$. On pourra résoudre l'équation différentielle et fixer la constante grâce à un DL3 en 0 de arctan.

252. (Mines Télécom 2017)

Rayon de convergence de somme de la série entière de terme général $\frac{x^n}{2n+1}$.

253. (CCP 2017)

On considère la série entière $\sum \mathrm{ch}(n)x^n$. Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

254. (Mines Télécom 2017)

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n$. Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

255. (CCP 2016)

Soit $\phi(x) = \exp(\exp(x) - 1)$. On admet le DL suivant : $\phi(x) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

(a) Calculer $\phi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

(b) On définit, par récurrence la suite (P_n), par : $P_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$.

Calculer P_1, P_2 et P_3.

(c) Montrer que $P_n \leqslant n!$

(d) Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est différent de 0.

(e) Prouver que $f'(x) = \exp(x) \times f(x)$

(f) En déduire le DSE de ϕ.

256. (CCP 2016)

(a) Montrer que $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ est définie sur $]-1, 1[$.

(b) Montrer que $(1 - x)S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n$.

(c) Montrer que $\ln(1 - x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} x^n$. Nature de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right)$.

(d) Montrer que $U(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right) x^{n+1}$ est continue sur $[-1, 1]$.

(e) Montrer que $\exists l \in \mathbb{R}, (1 - x)S(x) = -x\ln(1 - x) + l + o(1)$ au voisinage de 1^-.

(f) Nature de $\displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$.

257. (TPE-EIVP 2015)

(a) Montrer que, pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x, t) = e^{x \sin t}$ est développable en série entière.

(b) Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x, t)\mathrm{d}t$ est développable en série entière, à l'aide de $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t$; on précisera le théorème utilisé.

258. (ENSEA 2015)

(a) Rayon de convergence de $S(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que S est solution de l'équation différentielle $y'' - 2\cos\theta y' + y = 0$ et en déduire $S(x)$.

259. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\sum \dfrac{t^n}{(n!)^2}$ a un rayon de convergence infini.

On notera $J(t)$ sa somme.

(b) Montrer que $\forall t \geq 0$, $J(t) \geq 1$ et que $J(t) - 1 \sim t$ au voisinage de 0.

(c) Montrer que $N(t) = J(t) \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{uJ(u)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Montrer que $N(t) - J(t)\ln(t) = J(t)\displaystyle\int_t^1 \frac{J^2(u)-1}{uJ^2(u)}\,\mathrm{d}u$.

(e) Montrer que J est solution de $E : ty'' + y' - y = 0$.

(f) On pose $Z = \dfrac{y}{J}$; montrer que y est solution de E si et seulement si Z' vérifie une équation différentielle d'ordre 1 que l'on résoudra.

(g) En déduire les solutions de E.

260. (CCP 2015)
Rayon de convergence et somme de $\sum \dfrac{n}{n+1}x^n$.

261. (CCP 2015)
Rayon de convergence et somme de $\sum n^{(-1)^n}x^n$.

262. (CCP 2015)

(a) On définit une suite par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n$.

(b) On note respectivement R et S le rayon de convergence et la somme de $\sum u_n x^n$.

(c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum 3^n x^n$.

(d) Soit $P(X) = 2X^3 - X^2 + 2X - 1$; calculer $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3^n$ et en déduire que $R > 0$.

(f) Montrer que, pour $x \in]-R, R[$, $S(x) = \dfrac{x-1}{P(x)}$.

(g) Exprimer u_n en fonction de n (on pourra utiliser $P(x) = \dfrac{1}{S}(x-1)$).

(h) Exprimer $u_{n+2} + u_n$ en fonction de n et retrouver ainsi u_n.

263. (CCP 2015)

(a) Soient une suite de réels (a_n) telle que $\sum a_n$ converge et $R_n = \displaystyle\sum_{k \geq n} a_n$.

(b) Montrer que :
$$\sum_{k=n}^{N}(R_k - R_{k+1})(1-x^k) = R_n(1-x^n) + \sum_{k=n+1}^{N} R_k(x^{k+1} - x_k) + R_{k+1}(x^N - 1).$$

(c) Montrer que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$.

(d) Montrer que $\sum a_n(1-x^n)$ converge pour $x \in [0,1]$ et en déduire que $\sum (R_k - R_{k+1})(1-x^k)$ converge.

(e) Montrer que $\displaystyle\sum_{k \geq n}(R_k - R_{k+1})(1-x^k) = R_n(1-x^n) + \sum_{k \geq n+1} R_k(x^{k-1} - x^k)$.

(f) En déduire que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1]\,,\ \left|\sum_{k \geq n}(R_k - R_{k+1})(1-x^k)\right| \leq \varepsilon$$

(g) $f(x) = \sum a_n x^n$ est-elle continue ? En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum a_n$.

(h) Convergence et somme de $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

264. (CCP 2015)

(a) On note $\mathcal{S}$ l'ensensemble des suites réelles ; soit $A = (a_n) \in \mathcal{S}$; $A \in \mathcal{C}$ si la série de terme général $(\sum a_n)$ converge.

(b) On dira que A vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si la série entière $(\sum a_n x^n)$ a un rayon de convergence ≥ 1 et si $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ existe et vaut $\ell(A)$.

(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$. Les suites de terme général $\dfrac{1}{n!}$ et $(-1)^n$ sont elles dans $\mathcal{C}$? La suite de terme général $\dfrac{1}{n!}$ vérifie-elle $\mathcal{P}$?

(d) Si oui calculer ℓ pour cette suite. Mêmes questions pour $(-1)^n$.

(e) On choisit $A \in \mathcal{C}$ à termes positifs.

(f) Montrer que $\forall x \in [0,1[\,, \forall N \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

et en déduire que $\sum_{k=0}^{N} a_k \leq \ell(A)$.

(g) Montrer que si A vérifie $\mathcal{P}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \ell(A)$.

Manque dernière question.

265. (CCP 2015)

(a) On note F l'ensemble des fonctions continues de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f(x) = \dfrac{p(x)}{1-x^3}$ où $p \in \mathbb{R}_2[X]$.

(b) Montrer que $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{3n}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{1}{1-x^3}$.

(c) On note $h_k(x) = \dfrac{x^k}{1-x^3}$; montrer que F est un espace vectoriel de base (h_0, h_1, h_2) et que tout $f \in F$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ sous la forme $\sum a_n x^n$ avec $a_{n+3} = a_n$.

(d) Montrer que $< f, g >= f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \dfrac{1}{4} f''(0)g''(0)$ est un produit scalaire sur F, pour le quel (h_0, h_1, h_2) est orthogonale.

(e) Montrer que $g_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x)} \in F$.

Manque deux questions.

266. (Mines Télécom 2015)

Rayon de convergence et calcul $\displaystyle\sum_{n\geq 1} H_n x^n$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

267. (Mines Télécom 2015)

Montrer que si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $\rho > 0$, alors $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence infini.

268. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $\sum n a_n x^{n-1}$ et $\sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence R.
Trouver celui de $\sum P(n) a_n x^n$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.

269. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(3+x)}$ est développable en série entière .

Calculer le rayon de convergence puis expliciter le développement.

270. (Mines Télécom 2015)

(a) Développement en série entière de $\ln(1+t)$.

(b) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

III.7 Intégration

271. (CCINP 2023)

(a) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

(b) On pose, pour r réel, $s(r) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}dx$.

i. Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de s.

ii. Montrer par un changement de variable que pour tout $r \in \mathcal{D}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}dt$$

(c) L'objet de cette question est le calcul de $s(r)$ pour tout $r \in \mathcal{D}$.

i. Etant donné $\alpha > -1$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+\alpha} dt$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$, on a $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+\alpha} \right| \leqslant t^n$ et en déduire que (u_n) converge vers 0.

ii. En déduire, étant donné $\alpha > -1$ la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}dt$ sous la forme de la somme d'une série, puis celle de $s(r)$.

272. (Mines Télécom 2023) (Iman)

Soit F l'application définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(a) i. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer F'.

ii. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

iii. Combien de 0 F possède-t-elle ?

(b) Donner une expression de F sous forme simplifiée.

(c) Donner le développement en série entière de F en 0.

(d) Justifier que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge.

(e) A l'aide du théorème limite-série, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

273. (CCINP 2022)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

Montrer la convergence de I et calculer I.

274. (CCINP 2022)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$, $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$

(a) Montrer que I existe, et que $I = 0$.

(b) Calculer $I(a)$.

275. (CCINP 2022)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^2}\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que I et J existent.

(b) Montrer que $I = J$.

(c) Calculer I et J.

276. (CCINP 2022)

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(a) Justifier l'existence de I.

(b) Montrer que $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

277. (CCINP 2022)

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^k \,\mathrm{d}\theta$,

et pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\theta}}$.

(a) Rappeler la formule de Stirling.

(b) Justifier l'existence de I_k et de $f(x)$.

(c) i. Montrer que $I_{k+2} = \dfrac{(k+1)}{(k+2)} I_k$. *Indication : effectuer une intégration par parties*

ii. Calculer I_{2k}.

(d) i. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

ii. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \dfrac{\pi}{2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 x^{2n}$.

(e) *(?) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$*

278. (CCINP 2022)

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ selon la valeur de l'entier n et calculer cette intégrale quand elle existe.

279. (Mines Télécom 2022)

(a) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Sa valeur est notée I.

(b) Montrer l'égalité
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^{n+1}}.$$

280. (CCINP 2022)
Soit $a \geqslant 2$ entier et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On pose $u_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^a)^n}$. Justifier la convergence de l'intégrale.

(b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $u_n(a) = na\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}}\mathrm{d}t$.

En déduire la relation de récurrence $u_{n+1}(a) = \left(1 - \dfrac{1}{na}\right) u_n(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) On pose $w_n(a) = \ln u_n(a) + \dfrac{\ln n}{a}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Montrer que $w_{n+1}(a) - w_n(a) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

ii. Montrer que $(n^{\frac{1}{a}} u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

281. (CCINP 2021)

(a) Discuter de la nature de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^b}{a^t}\mathrm{d}t$ selon les valeurs de $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(b) Soit $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$. Trouver une relation entre $I(a,b)$ et $I(a,b-1)$.

282. (CCINP 2021)

On pose $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in [k, k+1[$. Que vaut $\lfloor x \rfloor$? En déduire une expression de $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$ en fonction de k.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$.

En déduire que $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = n + \ln(n!) - \ln(n+1)(n+\frac{1}{2})$.

(c) Montrer que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n + \dfrac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$.

(d) Etudier la convergence de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.

(e) Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

283. (CCINP 2021)

(a) Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$ est intégrable sur $]1,2]$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n+1}\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$..

i. Montrer que I_n est définie.

ii. Montrer que I_n est positive et décroissante.

Dans la suite, on admet que $I_n = \dfrac{\binom{2n}{n}\pi}{4^n}$.

(c) Soit $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$

i. Montrer que f est définie sur $]-\infty, 1[$.

ii. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

(d) Montrer que $(1-u)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} u^n$.

En déduire $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $\dfrac{1}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{x^n}{t^{n+1}\sqrt{t-1}}$

(e) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement.

284. (CCINP 2019)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Préciser f'.

(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

(c) Montrer que f ainsi prolongée est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

285. (CCINP 2019)

Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$. Calculer I.

286. (CCINP 2019)

Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$.

287. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = (2^{n+1}n!)^2 \frac{n+1}{(2n+3)!}$.

288. (TPE 2019)

(a) Existence de $f : t \mapsto \frac{1}{t^2+2t+2}$ et en donner une primitive.

(b) On pose $t = \tan(x/2)$; retrouver les relations $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

(c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

289. (CCINP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 ((1-t)\mathrm{e}^t)^n\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $P_n : \lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$.

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. On admet qu'elle vaut $\sqrt{\pi}/2$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(1-t) + t + \dfrac{t^2}{2}$ est développable en série entère au voisinage de 0 et préciser son développement.

(c) En déduire l'inégalité $\ln(1-t) + t \leqslant -\dfrac{t^2}{2}$ pour tout t dans $[0,1[$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'inégalité $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t$ puis $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

(e) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, prouver pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - P_n(n) = \dfrac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n} I_n$.

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une variable aléatoire X_n suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. Obtenir une majoration de $\mathbb{P}(X_n > n)$ puis trouver la limite de ce majorant quand n tend vers $+\infty$.

290. (Mines Télécom 2019)

Nature, selon $a \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax})\mathrm{d}x$.

291. (CCINP 2019)

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$. Montrer que $I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+5} I_n$ et en déduire que $I_n = (2^{n+1}n!)^2 \dfrac{n+1}{(2n+3)!}$.

292. (CCINP 2019)

On pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x$. Quelle est la nature de I_1 ? Celle de I_n ? Calculer I_n.

293. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$ est une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

et en déduire $\tilde{f}_0(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$.

(b) On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$.

Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t$.

(c) En déduire que, quand n tend vers $+\infty$, $I_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

(d) Pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\phi(f)(x) = \tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$.

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera le noyau.

(e) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), g(0) = 0\}$.

(f) Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions f telles que $\phi(f) = \lambda f$ et en déduire les valeurs propres de ϕ.

(g) Montrer que, si f est développable en série entière, $\phi(f)$ l'est aussi.

294. (CCINP 2019)

Soit $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n dt$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n.$

(a) Discuter l'existence de I_n. Calculer I_0 et I_1.

(b) i. Étudier les variations de $(I_n)_n$.

ii. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

(c) i. Montrer que $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ et donner un équivalent de $(I_n)_n$.

ii. Préciser la nature de $\sum I_n$ et de $\sum (-1)^n I_n$.

(d) Donner le rayon de convergence de $f(x)$.

(e) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in]-1, 1[$ et $t \in [1, e]$ $f_n(t) = t\ln(t)^n x^n$.

i. Montrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[1, e]$.

ii. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme d'intégrale.

295. (CCINP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 ((1-t)\mathrm{e}^t)^n \,\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $P_n : \lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$.

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ converge. On admet qu'elle vaut $\sqrt{\pi}/2$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(1-t) + t + \dfrac{t^2}{2}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser son développement.

(c) En déduire l'inégalité $\ln(1-t) + t \leqslant -\dfrac{t^2}{2}$ pour tout t dans $[0, 1[$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'inégalité $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2} \,\mathrm{d}t$ puis $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

(e) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, prouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $1 - P_n(n) = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \mathrm{e}^{-n} I_n$.

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une variable aléatoire X_n suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. Obtenir une majoration de $\mathbb{P}(X_n < n)$ puis trouver la limite de ce majorant quand n tend vers $+\infty$.

296. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n}$. Existence de I_n ? Limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

297. (CCINP 2019)

Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + t^n} \,\mathrm{d}t$.

298. (CCP 2018)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} dx$ et $v_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx$.

(a) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ converge.

(b) Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.

(c) i. Montrer que $v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}du$.

ii. Montrer que $v_n \sim \frac{\ln(n)}{2\pi}$.

(d) On définit la fonction f sur $]0, 1/2[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0, 1/2]$.

(e) Donner un équivalent de u_n.

299. (CCP 2018)

Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, on pose $I(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(a) $I(1)$ est-elle convergente ? Quelle est sa valeur ?

(b) Pour $0 \leq k \leq 5$, $I(X^k)$ est-elle absolument convergente ? $I(P)$ converge-t-elle ?

(c) On admet que $\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | I(P) = aP\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + bP(0) + cP\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(d) Calculer $I(X)$ et en déduire une relation entre a, b et c.

(e) On donne $I(X^2) = \dfrac{\pi}{2}$. Donner les valeurs de a, b et c.

(f) Donner une relation entre $I(X^{k+1})$ et $I(X^k)$ puis conclure.

300. (CCP 2018)

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $E_1 = \{f \in E | \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Soient $f \in E_1$ et F une primitive de f.
Montrer qu'il existe une unique primitive $P(f)$ dans E_1 et l'exprimer en fonction de F.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = P(f)(1)$.

(d) Montrer que $\forall x \in [0, 1], P(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$.

(e) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f_x(t) = f(t - x)$ si $0 \leq t \leq x - 1$ et $f_x(t) = f(-t + x - 1)$ si $x - 1 \leq t \leq 1$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)\mathrm{d}t = 0$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 tf_x(t)\mathrm{d}t$.

301. (CCP 2018)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\mathrm{d}x$.

(a) Montrer par IPP que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u$ converge.

(b) Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.

(c) i. Montrer que $v_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos u}{u}\mathrm{d}u$.

ii. Montrer que $v_n \sim \dfrac{\ln n}{2\pi}$.

(d) On définit la fonction f par $f : x \in]0, \frac{1}{2}[\mapsto \dfrac{1}{\tan(\pi x)} - \dfrac{1}{\pi x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0, \frac{1}{2}]$.

(e) Donner un équivalent de u_n.

302. (CCP 2018)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\sin t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Donner l'ensemble de définition de f.

(b) Montrer que f y est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser un équivalent en 0.

303. (TPE-EIVP 2018)

Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{1+t^4}$

(a) En utilisant le changement de variable $u = 1/t$, montrer que $I = J$.

(b) Calculer I ; on remarquera que $I = (I+J)/2$, et on utilisera le changement $x = t - 1/t$.

304. (ICNA 2017)

Convergence, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha(1 - e^{-1/\sqrt{x}})\mathrm{d}x$.

305. (CCP 2017)

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

306. (CCP 2017)

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$ converge et vaut $1 - \lim \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$.

307. (Mines Télécom 2016)

Décomposer $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x^2-2x+2)}$ en éléments simples.

Calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$.

308. (CCP 2015)

(a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2}$ existent.

(b) On admet que $J = \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$; montrer, à l'aide d'un changement de variable, que $J = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\displaystyle\int_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et la calculer.

(c) A l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^3}$ et en déduire que $2I = J$.

(d) Soient (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$; montrer que $0 \leq v_n \leq \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

(e) Montrer que si (u_n) est monotone, (v_n) converge et que si $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge aussi.

(f) Montrer que ϕ définie par $\phi(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ est bijective et donner un développement limité à l'ordre 2 de ϕ^{-1} au voisinage de 0.

(g) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

309. (TPE-EIVP 2015)

Existence et calcul de $I=\int_1^{+\infty} \frac{x-\operatorname{Arctan} x}{x(x^2+1)\operatorname{Arctan} x}\mathrm{d}x$

310. (CCP 2015)

(a) Exprimer $\sin^2 u$ et $\cos^2 u$ en fonction de $\cos(2u)$.

(b) Montrer que pour $x\in\mathbb{R}_+$, $\ln(1+x)\leq x$ et $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)$.

(c) Calculer $I=\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $x=\frac{1-t}{2}$.

(d) À l'aide d'une somme de Riemann, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$.

(e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\big(1+\frac{k(n-k)}{n^2}\big)$. Cas général ?

311. (CCP 2015)

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

312. (CCP 2015)

Montrer l'existence de $I=\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t$ puis montrer que $I=\sum_{n\geq 1}\frac{2}{n^3}$.

313. (CCP 2015)

(a) Montrer que, $\forall n<1$, $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{n}{x(1+x^2)}\ln\big(1+\frac{x}{n}\big)\,\mathrm{d}x$ existe.

(b) Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

314. (CCP 2015)

(a) On rappelle que $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et en déduire que $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ existe $\forall n\in\mathbb{N}$.

(c) Calculer I_0 et I_1 puis montrer que $\forall n>1$, $I_{n+1}=nI_{n-1}$.

(d) Soit $J(n,p)=\int_0^{+\infty} x^n e^{-p\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$; montrer que $I_n=p^{\frac{n+1}{2}}J(n,p)$.

(e) Montrer que $J(n+1,p)=\frac{n}{p}J(n-1,p)$.

(f) On admet que $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\big(x+\frac{1}{x}-2\big)x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1}-n^{-\frac{n+1}{2}}I_n$.

(g) Montrer que $0\leq\sqrt{n}I_n\leq I_{n+1}$ (on pourra étudier $\phi(x)=x+\frac{1}{x}-2$).

(h) Sachant que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$, montrer que :
$\sqrt{\dfrac{2n-1}{2n}} \leq \binom{2n}{n} 4^{-n}\sqrt{n\pi} \leq 1$. En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

315. (CCP 2015)
Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(-\frac{1}{1+t^2}\Big)^n \,\mathrm{d}t$ existe et étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} I_n$.

316. (CCP 2015)

(a) On rappelle que $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} t^k + \frac{t^{p+1}}{1-t}$.

(b) Montrer que $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{x^{k+1}}{k+1} - \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

(c) On note $F_p(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{p+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$; montrer que $\forall x \in]0,1[$,
$0 \leq F_p(x) \leq -x^{p+1}\ln(1-x)$.

(d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{F_p(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ convergent.

(e) *Manque une question, peut-être calcul de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(f) Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\sum_{k=0}^{n} x^k\,\mathrm{d}x$.

(g) Montrer que :
$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^{n+1})}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{1}{n+1} - 1\Big)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(h) On rappelle que $\sum \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$; en déduire la valeur de I_n *(donnée par l'énoncé)*.

317. (CCP 2015)
Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

III.8 Intégrales à paramètre

318. (CCINP 2023) (Titem)
On pose $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

(a) Soit $\varepsilon \in [0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

(b) i. Montrer que $f(0)$ existe et le calculer.
ii. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(c) i. Montrer que $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.
ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

(e) Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2^{2k})(k!)^2}$.

319. (CCINP 2023) (Lison)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\varphi(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

(b) Montrer que $\varphi(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Calculer $1 - \varphi(x)$. En déduire que φ a une limite finie en $+\infty$.

(d) i. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$ sous forme d'intégrale.

ii. Calculer $\varphi(x) + \varphi(-x)$ et donner une interprétation sur la courbe de φ.

320. (CCINP 2023)

(a) Résoudre $y'(x) + 2\pi x y(x) = 0$ et $y(0) = 1$.

(b) On donne $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

i. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n : t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

ii. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t)\exp(2i\pi xt)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que B_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$.

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \in E$, où E est le $\mathbb{R}$-ev des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f(t) = P(t)\exp(-\pi t^2)$où P est un polynôme.

321. (CCINP 2022, CCP 2015)

(a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \mathrm{Arctan}(x \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

i. Montrer que f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer que f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.

iii. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) i. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner la dérivée de f.

(d) Montrer que $f(x) + f(1/x) = \frac{\pi^2}{4}$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

322. (CCINP 2022)

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Montrer que f est bornée. Calculer $f(0)$.

ii. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) i. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$.

ii. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

323. (CCINP 2022)

Soit $f(x,t) = \dfrac{xt\sin(t)}{x^2 - 2x\cos t + 1}$, pour $x \in]0,1[$, $t \in]0,\pi[$. On pose $f(1,0) = 1$.

Introduction : On admet que f est développable en série entière à son origine, on pose $f(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n$.

On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1-\cos t}\mathrm{d}t$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x,t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que I est bien définie.
On pose $F(1) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(1,t)\mathrm{d}t = \frac{I}{2}$.

(b) Trouver une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0(t) = 0$, $u_1(t) = t\sin t$ et $\forall n \geq 2$, $u_n(t) - 2\cos(t)u_{n-1}(t) + u_{n-2}(t) = 0$, pour $t \in]0,\pi[$.
La relation précédente reste-t-elle valable pour $t \in [0,\pi]$?

(c) En remarquant que $\forall (x,t) \in]0,1[\times[0,\pi]$, $(x^2 - 2x\cos t + 1)f(x,t) = xt\sin t$, déterminer $a_n(t)$ et montrer que le rayon de convergence $R_T \geq 1$.

(d) Montrer que F est continue sur $[0,1]$. *Indication : on remarque que* $x \mapsto f(x,t)$ *est continue et strictement croissante sur* $[0,1]$.

(e) En déduire I.

324. (CCINP 2022)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) On suppose $x \neq \pm 1$. Trouver $a(x)$ et $b(x)$ tels que

$$\frac{a(x)}{1+t^2} + \frac{b(x)}{1+x^2t^2} = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

(b) Montrer que f est bien définie.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis calculer f'.

(d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$

325. (Mines Télécom 2022)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Existence et continuité de F sur $]0,+\infty[$.

(b) Calculer la limite en $+\infty$ de $xF(x)$.

(c) Donner un équivalent de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

326. (CCINP 2022)

On considère l'équation différentielle $x^2y'(x) + y(x) = x$, notée (E).

(a) Montrer que $\dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures.

(b) Pour tout $x > 0$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$. Sa valeur est notée $h(x)$.

(c) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + h(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\ ;\ k \in \mathbb{R}\}$.

(d) Soit $x > 0$. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{x}{1+ux}$, montrer l'égalité $h(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

(e) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+ux}\,\mathrm{d}u$ est l'unique solution de (E) sur $[0, +\infty[$.

(f) Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.

(g) Étudier la limite de la fonction g en $+\infty$.

327. (CCINP 2021)

Soit $b_n : t \mapsto t^n e^{-\pi t^2}$, E l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto P(x)e^{-\pi x^2}$, où P est une fonction polynomiale.

(a) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 2\pi xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b) i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

ii. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t)\mathrm{d}t$. *(Indication* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*)*

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_n : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t)e^{2i\pi xt}\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$.

(d) Montrer que $B_0(x) = e^{-\pi x^2}$.

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n appartient à E.

328. (CCINP 2021)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n}\mathrm{d}t$ converge.

Cette intégrale sera notée $f_n(x)$ dans la suite de l'exercice.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$. A l'aide de changements de variable, montrer que $g_n(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n}\mathrm{d}t$ converge et que l'on a $f_n(x) = x^{n-1}e^x g_n(x)$.

(c) Soit $n \geq 2$. Montrer que f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. En déduire un équivalent de g_n en 0^+.

(d) Montrer que $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x^n}$.

329. (CCINP 2021)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge, pour $x > 0$.

(b) i. Montrer que F est strictement positive et décroissante.

ii. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

(c) i. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii. Calculer $F'(x) - F(x)$.

iii. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Montrer que $F(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.

Indication : On pourra utiliser un ou plusieurs changement(s) de variable.

330. (Mines Télécom 2019)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

(a) Domaine de définition D de f.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

(c) Calculer f.

331. (CCINP 2019)

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \frac{1}{t} e^{-1/t}$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{0^+} \varphi = 0$.

(b) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^x \varphi(t) dt$ existe. On la note $h(x)$.

(c) Montrer que les solutions de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{1/x}(h(x) + k)$, avec k une constante réelle.

(d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{1/x} h(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$. On pourra effectuer le changement de variable $t = \frac{x}{1+xu}$.

(e) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

(f) Montrer que $g : x \mapsto x f(x)$ est solution de $x^2 y'(x) + y(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$ et que c'est la seule.

(g) Trouver la limite de g en $+\infty$.

332. (CCINP 2019)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u} du$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.

(b) Quel est l'ensemble de définition de F ? Montrer que F est croissante sur celui-ci.

(c) Calculer $F(x+1) - F(x)$ et en déduire $F(n)$ en fonction de H_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$.

(e) En déduire que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(1+x)$.

333. (CCINP 2019)

Montrer que $f(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{iyt} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

334. (Mines Télécom 2019)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose pour x dans $\mathbb{R}$:
$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-pt} dt$ et $J_p(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-pt} dt$.

(a) Montrer que I_p et J_p sont définies sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que I_p est dérivable sur$\mathbb{R}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p(x)$.

(d) Exprimer $J_p(x)$ en fonction de x pour tout x de $\mathbb{R}$.

(e) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a, la série $\sum_{p\geq 1} J_p(a^p)$ converge-t-elle ?

335. (Mines Télécom 2019)
Soit g une fonction bornée impaire et continue.
Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} g(xt)e^{-x^2t}dt.$

(a) Étude de la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ en fonction du réel α.

(b) i. Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$.

ii. Quelle est la parité de F ?

(c) i. Enoncer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

ii. F est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

(d) i. On pose $g = \sin$.

ii. Calculer F

iii. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

336. (CCINP 2019)
Soit $f(x) = \int_0^1 t^x e^{2t}dt.$

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Soit $x > -1$, montrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{e^2}{x+1}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.

(c) Par une minoration de f, montrer que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$.

(d) Montrer que f est de classe C^1 et donner f'.

(e) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

(f) De l'équivalent déduire α et β tels que $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

337. (CCINP 2019)
Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t}dt.$

(a) Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ converge.

(b) i. Montrer que F est positive et décroissante.

ii. Donner la limite en $+\infty$ de $F(x)$.

(c) Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Calculer $F(x) - F'(x)$ et en donner une représentation simple en fonction de x.

(d) Montrer que $F(x)$ peut se mettre sous la forme $\exp(x)\int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t}dt$.

(e) i. Donner la limite de $F(x)$ en 0.

ii. Préciser un équivalent en 0.

338. (CCINP 2019)

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser partie réelle et imaginaire de $\dfrac{1}{x+i}$.

(b) Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2(x+i)}y = 0$.

(c) On définit pour x réel, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$. Montrer qu'on définit ainsi une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue. Étudier le caractère C^1 et exprimer f'.

(d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{1}{2(x+i)} f(x)$.

(e) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, on note $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}} dt$. Montrer l'existence de I_α. Exprimer I_α en fonction de f. En déduire le signe de I_α.

339. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x \tan t)\,\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

(c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et donner une expression de $F'(x)$ sans $\int$ grâce au changement de variable $u = x \tan t$.

(e) Montrer que $|F(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{4}$ pour tout réel x.

(f) Montrer que $F(x) \to \frac{\pi^2}{4}$ lorsque $x \to +\infty$.

340. (CCP 2018)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{1+x^2}$ avec K indépendant de x à préciser.

(c) i. Pour tout réel x, montrer l'existence de $f(x)$.

ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ sous forme d'une intégrale, en déduire l'expression de f.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montrer l'existence de $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u$.

(e) En supposant que L est continue en 0, calculer $L(0)$.

341. (EIVP 2017)

(a) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$.

342. (EIVP 2017)

(a) Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer g' sous forme d'intégrale.

(c) Que dire de g sur $\mathbb{R}_-^*$?

343. (CCP 2017)

Soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer f" sous forme d'une intégrale.

(c) i. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ où $g(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}$.

ii. Montrer que f est solution de $y'' - y = 0$.

(d) Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{e}^{ixu}\,\mathrm{d}u$.

(e) Déterminer f.

344. (CCP 2017)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$ puis trouver sa limite en $+\infty$.

345. (CCP 2017)

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\mathrm{d}t$ pour tout x réel convenable.

(a) Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$. On admet que F l'est aussi.

(b) Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $G(x) = xG(1)$.

(c) Pour tout x réel, montrer l'encadrement $0 \leqslant G(x) - F(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$. En déduire que $F(x)$ est équivalent à $xG(1)$ quand x tend vers $+\infty$.

(d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde est donnée par $\forall x \in \mathbb{R},\quad F''(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(e) Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = \pi - 4xG(1)$ sur $]0,+\infty[$.

(f) En déduire une expression de F sur $]0,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

346. (CCP 2017)

On définit, lorsque celle-ci existe, la fonction $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

(a) Soit $\varepsilon \in [0,1[$, calculer $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

(b) i. En déduire que $f(0)$ existe et donner sa valeur.

ii. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(c) i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que f vérifie l'équation différentielle $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

(e) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

347. (CCP 2017)

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-1/t}$.

(a) Montrer que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

(b) En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe. On la note $h(x)$.

(c) Montrer que les solutions de $x^2y'(x)+y(x)=x$ sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \mathrm{e}^{1/x}(h(x)+k)$, où k est une constante réelle.

(d) Pour tout $x>0$, montrer l'égalité $\mathrm{e}^{1/x}h(x)=x\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+xu}\,\mathrm{d}u$.

On pourra considérer le changement de variable $t=\dfrac{x}{1+xu}$.

(e) Montrer que la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+xu}\,\mathrm{d}u$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

(f) Montrer que $g:x\mapsto xf(x)$ est solution de $x^2y'(x)+y(x)=x$ sur $[0,+\infty[$ et que c'est la seule.

(g) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$.

(h) Trouver la limite de g en $+\infty$.

348. (CCP 2016)

Montrer que $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis trouver sa limite en $+\infty$.

349. (CCP 2016)

Soit Γ la fonction définie par : $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\Gamma(1)$.

(b) i. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

ii. Soit $t>0$, soient $a>0$ et $b>0$. Montrer que $\forall x\in[a,b],\ t^{x-1}\leqslant t^{a-1}+t^{b-1}$

(c) i. Montrer que $\Gamma\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$, expliciter $\Gamma''(x)$ et déterminer les variations de Γ'.

ii. Question non traitée mais je me souviens qu'il fallait en déduire les variations de Γ.

(d) Étudier les limites de Γ en 0^+ et en $+\infty$.

(e) Démontrer l'existence d'une suite (a_n) que l'on explicitera telle que pour tout $x>0$:

$$\Gamma(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{x+n}+\int_1^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

350. (EIVP 2016)

Montrer que $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}-1}{t}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$, calculer $I'(x)$ puis $I(x)$.

351. (Mines Télécom 2016)

Montrer que $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer F'. En déduire F.

352. (Mines Télécom 2015)

Soit $f(x)=\int_0^{+\infty}\exp(-xt)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer f'.

(b) En déduire une expression de $f(x)$.

353. (CCP 2015)

(a) Ensemble de définition de $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

354. (CCP 2015)

On admet la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que, pour $A \geq 0$, $\int_0^A \frac{\sin t}{x+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{\cos A}{x+A} - \int_0^A \frac{\cos t}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$.

(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$ converge pour $x > 0$.

(c) En déduire que $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

(d) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression simple de $g'' + g$.

355. (CCP 2015)

(a) Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} \mathrm{d}t$ ne converge que pour $x > 0$.

(b) Montrer que F est décroissante et positive.

(c) Montrer que $\forall x > 0,\ F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} \mathrm{d}t$ et en déduire sa limite en 0.

(d) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$.

(e) En déduire que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(f) Montrer que $F(x) = e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$ et en déduire que $F(x) \sim -\ln x$ en 0^+.

356. (TPE-EIVP 2015)

(a) Montrer que $f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est solution de l'équation $xy'' + y' + xy = 0$.

357. (CCP 2015)

(a) Montrer que $f(t) = \ln t \ln(1 - t^x)$ est définie et continue sur $]0, 1[$.

(b) Montrer l'existence de $I(x) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ puis que $I(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(kx+1)^2}$.

(c) Montrer que I est $\mathcal{C}^1$ et étudier sa monotonie.

(d) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel qu'au voisinage de $+\infty$, $I(x) \sim \frac{A}{x^2}$.

(e) Déterminer la limite de $I(x)$ en $+\infty$.

358. (CCP 2015)

(a) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos x)\mathrm{e}^{-xt}}{t^2} \mathrm{d}t$ existe.

(b) On pose $\phi(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$, pour $x \geq 0$; montrer que $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$ (on admettra que $\left|\frac{1 - \cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{2}$).

(c) Montrer que ϕ est continue, puis qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) On admet que $\phi'(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$; trouver ϕ et calculer $\phi(0)$.

(e) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t \,\mathrm{d}t$ existe et la calculer.

359. (CCP 2015)

(a) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ n'existe que si $x > 0$.

(b) Montrer que F est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que $F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

(d) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$·.

360. (CCP 2015)

(a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, calculer $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{\mathrm{i}+x}$ et $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{\mathrm{i}+x}$

puis en déduire les solutions de $y' + \dfrac{1}{2(x+\mathrm{i})}y = 0$.

(b) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est définie sur un ensemble D à déterminer et qu'elle y est $\mathcal{C}^1$. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{1}{2(x+\mathrm{i})}f(x)$.

(c) $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est-elle définie pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$? Exprimer I_α à l'aide de f.

361. (CCP 2015)

(a) Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(b) Calculer $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ à l'aide du changement de variable $t = u^2$ et en déduire $f\Big(\dfrac{3}{2}\Big)$.

362. (CCP 2015)

(a) Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, existe et est continue sur $\mathbb{R}_+$, puis qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $f(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

manque fin

363. (Mines Télécom 2015)

Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \Big(t^{x-1} - \frac{1}{\ln t}\Big)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Montrer que f y est $\mathcal{C}^1$ et écrire f' sans intégrale. En déduire f.

IV Algèbre

IV.1 Logique, ensembles, applications, dénombrement, arithmétique

364. (CCINP 2022)
On définit une fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ par $f : (n, m) \mapsto 2^n(2m + 1)$.
   (a) Trouver un antécédent de 56 par f.
   (b) L'application f est-elle injective ?
   (c) Est-elle surjective ?
   (d) L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est-il dénombrable ?

365. (CCINP 2021)
Soit $k < n$, $k, n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(k + 1)(k + 2)\binom{n+2}{k+2} = (n + 1)(n + 2)\binom{n}{k}$.
   (b) Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k + 1)(k + 2)}\binom{n}{k}$.

366. (CCINP 2019)
f désigne une application d'un ensemble E dans lui-même.
   (a) Montrer que si f est surjective, alors $f \circ f$ est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

367. (CCP 2017)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

368. (CCP 2016)
Soit $P = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}, D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$.
Montrer que $\forall z \in P, f(z) \in D$ et que f réalise une bijection de P sur D.

369. (CCP 2016)
On donne un ensemble E de cardinal n et, pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note Ω_i l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que $\operatorname{card} B = i$ et $A \cup B = E$.
Trouver $\operatorname{card} \Omega_i$ (on pourra au préalable étudier le cas $n = 5$, $i = 3$).

370. (EIVP 2016)
Par des raisonnements d'analyse combinatoire, montrer que :
   (a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;
   (b) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$;
   (c) $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

IV.2 Nombres complexes et trigonométrie

371. (CCINP 2023) (Colin)
Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$.
On cherche à savoir s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\dfrac{3 + 4i}{5})^n = 1$.

(a) Montrer que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ puis que $\dfrac{3+4i}{5} \in \mathcal{U}$.

(b) Soit a_k la partie réelle de $(3+4i)^k$, et b_k sa partie imaginaire.

Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k, puis montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k et b_k sont des entiers relatifs.

(c) Montrer que, pour $k \geq 1$, le reste de la division euclidienne de a_k par 5 est 3, puis montrer que le reste de la division euclidienne de b_k par 5 est 4. Conclure.

(d) Démontrer l'inégalité : $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| \leq |\beta - \alpha|$.

(e) *Question sur une boule ouverte.*

372. (CCINP 2021)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta$.

(a) Exprimer $|1-z|$ en fonction de θ.

(b) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $|1+z^2| \geq 1$?

373. (CCINP 2021)

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^n = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

(b) Résoudre l'équation : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$.

374. (CCINP 2019)

(a) Résoudre $\sin((2n+1)\theta) = 0$, $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

(b) Montrer que : $(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1} = \cos((2n+1)\theta) + i\sin((2n+1)\theta)$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k}(-1)^k \cos^{2n+1-2k}\theta \sin^{2k}\theta + i\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k \cos^{2n-2k}\theta \sin^{2k+1}\theta$

(après avoir développé, on pourra séparer les termes pairs et impairs).

(c) Montrer que $\exists! P_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[, P_n(\dfrac{1}{\tan^2\theta}) = \dfrac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}\theta}$ et expliciter P_n.

(d) Trouver les racines de P_n, leur produit et leur somme.

375. (CCINP 2019)

Soit $z \in \mathbf{C}^*$. On pose $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1})$.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant 1 tel que : $\forall z \in \mathbf{C}^*,\ f(z^n) = P_n(f(z))$.

On donnera une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}.

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le seul polynôme Q vérifiant : $\forall z \in \mathbf{C}^*,\ f(z^n) = Q(f(z))$ est P_n.

(d) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. On pose $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}$.

Calculer $f(z_k^n)$. Que peut-on en déduire ? Donner une expression des P_n.

(e) i. Montrer que $(P_n(0))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

ii. En déduire le coefficient constant de P_n.

(f) Calculer $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

(g) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

!

376. (CCP 2018)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = e^{i\theta}$.
   (a) Exprimer $|1+z|$ en fonction de θ.
   (b) Montrer que $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.
377. (CCP 2015)
Soit $w = \exp(2i\pi/7)$
Soient $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$
Calculer $S+T$, $S \times T$, puis en déduire S et T.
378. (CCP 2015)
Soit $\alpha = e^{i\pi/10}$; α^3, α^7 et α^9 sont-elles racines de $1 - X^2 + X^4 - X^6 + X^8$?
379. (CCP 2015)
Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et calculer $\sum\limits_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.
380. (CCP 2015)
Soit $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $1 + z^k + z^{2k}$.

IV.3 Espaces vectoriels normés

381. (CCINP 2022)
Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on pose $\|M\|_\infty = \max\{|m_{i,j}| \,;\, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.
   (a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
   (b) On pose $N = A - I_3$. Calculer N^2, puis les autres puissances de N.
   (c) Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.
   (e) Pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration $\|MN\|_\infty \leqslant d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty$.
   (f) On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.
   Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
382. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, à coefficients strictement positifs et telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On admet que $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on pose $\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.
   (b) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}$ $\|AX\| \leq \|X\|$.
   (c) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que : $|\lambda| \leq 1$.

(d) On pose $B = A + I_n = [b_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ b_{i,i} > \sum_{j\neq i} b_{i,j}$.

(e) Montrer que B est inversible.

(f) Montrer que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R et que R est semblable à $diag(1,0,...,0)$.

(g) Montrer que $R = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(h) BONUS : En prenant la matrice extraite $= [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n-1}$ de A et en s'inspirant du raisonnement de la question 382e, montrer que l'on a bien $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$

383. (CCINP 2019, CCP 2017)
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
On note $\|A\| = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ valeur propre de } A\}$, et on admet que $\|\cdot\|$ est une norme.

(a) Déterminer $\|A\|$ et $\rho(A)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix}$

(b) Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|$ pour $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

(c) i. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Montrer que $|\lambda x_i| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}x_j|$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

ii. En déduire que $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

(d) Montrer que $\rho(A)^k = \rho(A^k)$ pour tout $k \geqslant 1$.

(e) Montrer que, si A est diagonalisable, la suite (A^k) converge vers la matrice nulle dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

384. (CCP 2018)
On étudie $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}\right\}$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x,y) \in E$.

(b) Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

385. (CCP 2016)
On note $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Prouver la majoration $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

386. (Mines Télécom 2015)
A (x,y) on associe $\sup\{|x+ty|, t \in [0,1]\}$
Montrer que cette application définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et préciser la boule centrée en (0,0) de rayon 1.

387. (CCP 2015)

(a) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme quelconque et on note A_n l'ensemble des matrices M telles que $M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$ où a et b sont deux réels fixés distincts. On dit que M est isolée dans A_n s'il existe $r > 0$ tel que $B(M,r) \cap A_n = \{M\}$.

(b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in A_2$.

(c) Montrer que si $M \in A_n$, ses seules valeurs propres possibles sont a et b.

(d) En déduire que $\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{tr}(M) = ka + (n-k)b$.

(e) Montrer que tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(f) En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r > 0$, $\forall M \in B(aI_n, r)$, $|\mathrm{tr}(M) - na| \leq \varepsilon$.

(g) Montrer que aI_n est isolée dans A_n.

(h) Montrer que, pour $p > 1$, $O_p = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{p^2}}} \begin{pmatrix} 1 & 1/p \\ -1/p & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale et que la suite de terme général $O_p^{-1}AO_p$ converge vers A.

(i) En déduire que A n'est pas isolée dans A_2.

388. (Mines Télécom 2015)
Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, en donner l'adhérence et l'intérieur.

389. (Mines Télécom 2015)
Montrer que $\Phi(f) = \sqrt{f(0)^2 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$ est une norme sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (on pourra introduire $\phi(f,g) = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$).

IV.4 Polynômes

390. (CCINP 2023)
Soit un entier $q \geq 2$ et $Q = qX^q - (X^{q-1} + X^{q-2} + ... + 1)$.

(a) Montrer que 1 est racine de Q. Notons $R = (X-1) \times Q$.
Montrer que $R = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.

(b) Soit z racine complexe de Q. On admet pour les questions 2) et 3) que si $\mid z \mid = 1$, alors $z = 1$.

i. Montrer que $q \mid z \mid^q \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \mid z \mid^k$

ii. Montrer que si $z \neq 1$, alors $\mid z \mid < 1$. (Indication : raisonnement par l'absurde et comparaison de $\mid z \mid^k$ avec $\mid z \mid^q$ pour $k \in [\![0, q-1]\!]$).

(c) Factoriser R' en produit de polynômes. Montrer que 1 est racine double de R.
Montrer que les autres racines de R sont simples .
Conclure quant à la multiplicité des racines de Q.

(d) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $Q(A) = O_n$. Montrer que A est diagonalisable. Déterminer, après en avoir montré l'existence, la nature géométrique de la limite de $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(e) Soit z racine complexe de Q. Montrer que si $\mid z \mid = 1$, alors $z = 1$.

391. (CCINP 2022)
Soit $P(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$. Factoriser P.
Indication : utiliser Euler.

392. (CCINP 2022)
Soit $n \geq 0$ *(ou 1)*, $P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$, $Q = (n+1)X^n + X^{n-1} + 1$. Montrer que P et Q ont les mêmes racines dans $\mathbb{C}$. En déduire que P n'admet que des racines simples.

393. (CCINP 2021)
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynôme définie par : $P_0(X) = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $P_k(X) = \frac{1}{k!}$ $X(X-k)^{k-1}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) i. Montrer que $P_k'(X) = P_{k-1}(X-1)$ pour $k \geqslant 1$.
      ii. Montrer que $P_k^{(n)}(X) = P_{k-n}(X-n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$.
   (c) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n l'application définie pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$u_n(Q)(X) = Q(X) - Q'(X+1).$$

      i. Montrer que u_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser la matrice de u_n dans $\mathcal{B}$.
      ii. Montrer que u_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (d) Déterminer u_n^{-1}.

394. (CCINP 2019)
On note J_n la matrice de coefficients $a_{ij} = \frac{1}{2}$ si $|i-j| = 1$ et 0 sinon.
On donne $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall n \geq 2$, $P_n = \det(XI_n - J_n)$.

   (a) Montrer que $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin\big((n+1)x\big) + \sin\big((n-1)x\big) = 2\cos x \sin(nx)$.
   (b) Montrer que $\forall n \geq 2$, $P_n(X) = XP_{n-1}(X) - \frac{1}{4}P_{n-2}(X)$.
   (c) On pose $Q_n = 2^n P_n$; montrer que $Q_n(\cos x) = \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}$·, pour $x \in]0, \pi[$.
   (d) Montrer que P_n est scindé et que les sous-espaces propres de J_n sont des droites vectorielles.
   (e) Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ et $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.
   (f) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

395. (CCINP 2019)
Montrer que f qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe le reste de la division euclidienne de $(X^4-1)P$ par $X^4 - X$ est un endomorphisme et donner son noyau.

396. (CCINP 2019)
Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de P et déterminer sa multiplicité.

397. (CCINP 2019)
Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

398. (Mines Télécom 2018)
Trouver le reste de division euclidienne de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X\sin k + \cos k)$ par $X^2 + 1$.

399. (CCP 2018)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X-1)^{2n+1} - 1$.

(a) Déterminer les racines du polynôme P.

(b) En déduire une simplification du produit $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

400. (CCP 2018)
Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = (X+1)^n - e^{2in\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

401. (CCP 2017)
Montrer que $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$;

402. (CCP 2017)
Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Montrer que 1 est racine de Q.

(b) On pose $R(X) = (X-1)Q(X)$. Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.

(c) Montrer que z, racine complexe de Q, vérifie $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et en déduire que $|z| \leq 1$ (on pourra raisonner par l'absurde et comparer $|z|^k$ et $|z|^q$ pour $k \in [\![0, q-1]\!]$).

(d) On suppose que si $|z| = 1$ alors $z = 1$, sinon $|z| < 1$.

i. Justifier sans calcul que R' est factorisable en produit de polynômes de degré 1, puis effectuer cette factorisation. Montrer que 1 est racine double de R. Montrer que les autres racines de R sont simples.

ii. Soit A une matrice complexe, diagonalisable, d'ordre n et dont le spectre est inclus dans l'ensemble des racines complexes de Q. Montrer que A^k converge vers une matrice de projection.

(e) Montrer que si $|z| = 1$ alors $z = 1$, sinon $|z| < 1$.

403. (Mines Télécom 2016)
Écrire, sans démonstration et à l'aide de la formule de Taylor, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(1, X-a, \ldots, (X-a)^n)$.
En déduire que a est racine multiple d'ordre r de P si et seulement si
$\forall k \in [\![0, r-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

404. (Télécom SudParis 2015)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que
$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_a^b P(x)Q(x)\mathrm{d}x = 0$.
Montrer que toutes les racines complexes de P sont dans $]a,b[$, qu'il y en a n, qu'elles sont simples, et que P est de degré exactement n.
On pourra considérer les k racines de P d'ordre impair dans $]a,b[$, notées $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

405. (CCP 2015)
On note x, y, z les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c$.
Exprimer $x+y+z$ et $xy+xz+yz$ en fonction de a, b et c.

406. (CCP 2015)
Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.
Trouver les racines complexes de P_n.

407. (CCP 2015)
Trouver $P \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que $P(j) = j^2$, $P(j^2) = j$, $P'(j) = j$, $P'(j^2) = j^2$ (on pourra s'intéresser à $R(X) = P'(X) - X$).

IV.5 Algèbre linéaire

408. (CCINP 2023)
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls de E, a et b deux complexes (a non nul) tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$.
ϕ_g désigne l'endomorphisme de $L_{\mathbb{C}}(E)$ qui à u associe $\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u$.
Pour les 4 premières questions, on suppose que $b = 0$.

    (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.
    (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\phi_g(f^n) = anf^n$.
    (c) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $f^k = 0$.
    (d) Soit u l'endomorphisme induit de g sur $\mathrm{Ker} f$. Montrer que u admet un vecteur propre et que f et g ont un vecteur propre commun.
    (e) On suppose que $b \neq 0$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

409. (Mines Télécom 2023) (Iman)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

    (a) Donner la définition d'une valeur propre de A et de son polynôme caractéristique. Quel est le lien entre les deux ? A admet-elle toujours une valeur propre ?
    (b) Quel est le lien entre les valeurs propres de A et un polynôme annulateur de A ? Expliquer.
    (c) On suppose que $A^2 + A = I_n$. A admet-elle des valeurs propres réelles ? complexes ? Que peut-on en dire ?

410. (Mines Télécom 2023) (Pascal)
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    (a) Calculer χ_A et déterminer A^n.
    (b) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}((A^n)_{n\geq 0})$.
    (c) Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
    En raisonnant avec des matrices par blocs, calculer C^n. C est-elle diagonalisable ?
    (d) *?*

411. (Mines Télécom 2023) (Lowell)
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0_n$.
Montrer que $\dfrac{(\mathrm{tr}\, A)^2}{\mathrm{tr}(A^2)} \leq \mathrm{rg}\, A$.

412. (Mines Télécom 2023) (Lison)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $B = A + A^T$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $B^k = 0$.
Montrer que A est antisymétrique, c'est à dire que $A^T = -A$.

413. (CCINP 2023) (Pascal)
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

(b) Soit φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(A) = \lambda M$, avec λ une valeur propre de A. Déterminer φ.

414. (CCINP 2023) (Lowell)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) A est-elle diagonalisable ?

(b) On donne $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3, -4\}$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A$.

i. Montrer que $AM = MA$.

ii. Prouver par analyse-synthèse que M existe.

415. (CCINP 2023) (Elisa)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, λ une valeur propre de A, $B = jA$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

(a) Montrer que $j\lambda$ est valeur propre de B.

(b) On suppose A et B semblables. Montrer que $j\lambda$ est valeur propre de A.

416. (CCINP 2023) (Sabrine)

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(a) C est-elle diagonalisable ?

(b) i. Déterminer (α_k) et (β_k) tels que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, C^{2k} = \alpha_k C^2$ et $C^{2k+1} = \beta_k C$.

ii. *?*

(c) i. Exprimer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ à l'aide de fonctions usuelles. Pour quels x est-ce valable ?

ii. En déduire le domaine de définition et une expression à l'aide de fonctions usuelles de :

— $f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$

— $f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^{2n}$

(d) *?*

417. (CCINP 2023) (Iman)

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^k = f \circ f^{k-1}$.
On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme cyclique si il existe $e_1 \in E$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est une base de E.

(a) On suppose ici $n = 3$. On note $\mathcal{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$. En déduire que f est cyclique.

(b) On considère dans cette question $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

i. Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geq 1$.
Montrer que $\deg(f(Q)) = \deg(Q) - 1$. En déduire que f n'est pas bijectif.

ii. f est-il cyclique ? *(Indication : calculer* $\deg f^j(X^n)$.*)*

(c) On suppose ici que $\operatorname{Ker} f^{n-1} \neq E$ et $\operatorname{Ker} f^n = E$.

i. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

ii. Montrer que f est cyclique.

(d) On suppose ici f cyclique.

i. Montrer que, si f est diagonalisable, alors ses sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

ii. *?*

418. (CCINP 2023)
$E = M_2(\mathbb{R})$, $A \in E$ avec $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$.
On pose $\varphi_A : E \longrightarrow E$, $M \longrightarrow AM - MA$.
Déterminer $\mathrm{Sp}(\varphi_A)$ et étudier la diagonalisabilité de φ_A.

419. (Mines Télécom 2023)
On définit les suite $(u_n), (v_n), (w_n)$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -2$ et les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4(3u_n - v_n + 3w_n) \\ w_{n+1} = 6u_n - 5w_n \end{cases}$$
Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n.

420. (CCINP 2023)
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}(P(X) - P(1-X)) \end{array}$.

(a) Calculer φ^2.

(b) Démontrer que $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Vect}\left(X - \frac{1}{2}, (X - \frac{1}{2})^3\right)$ et $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}\left(1, (X - \frac{1}{2})^2\right)$.

(c) Montrer que φ est un projecteur et en identifier les éléments géométriques.

421. (CCINP 2023)

(a) On note F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, stable par produit.
Donner la dimension de F.

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ ne contenant pas I_n et stable par produit.

i. Rappeler la valeur de $E_{i,j} \cdot E_{k,\ell}$ avec $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$.
($E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1.)

ii. Montrer que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$.

(c) i. Soit $M, M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et p projecteur sur F parallèlement à $\operatorname{Vect}(I_n)$, défini sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $p(MM') = p(M)p(M')$.

ii. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $M^2 \in F$, alors $M \in F$.

(d) Déduire des questions précédentes que $E_{i,j} \in F$ pour $i \neq j$.
En déduire une contradiction + une autre question oubliée..

(e) La question s'intéressait aux matrices de trace nulle.

422. (CCINP 2023)
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Donner le polynôme caractéristique de $M(z)$.
Pour quelles valeurs de z, $M(z)$ est-elle diagonalisable ?

423. (CCINP 2022)
Soit $\varphi_U : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]; P \mapsto P + P(a)U$, avec $a \in \mathbb{C}$ et U un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.

(a) Montrer que φ_U est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

(b) i. Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi_U \subset \operatorname{Vect}(U)$.

ii. — Montrer que $U(a) = -1 \Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi_U = \operatorname{Vect}(U)$.
— Montrer que $U(a) \neq -1 \Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi_U = \{0\}$.

(c) i. Montrer que $\varphi_U^2 - (2 + U(a))\varphi_U + (1 + U(a)) \operatorname{Id}_{\mathbb{C}[X]} = 0$.

ii. En déduire une CNS pour que φ_U soit un automorphisme. Préciser φ_U^{-1}.

(d) On suppose $U(a) = -1$. Quelle est la nature de φ_U ? En déduire $\operatorname{Im} \varphi_U$.

(e) Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $V = P + P(a)U$ d'inconnue P.

424. (Mines Télécom 2022)

(a) La matrice $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Trouver les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ symétriques et non diagonalisables. *Indication : Raisonner sur les racines du polynôme caractéristique.*

425. (Mines Télécom 2022)
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Trouver les valeurs propres de A avec leurs multiplicités.
Indication : Calculer $\operatorname{tr}(A^2)$.

426. (Mines Télécom 2022)
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) i. Montrer que 0 est valeur propre de A.

ii. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

(b) Donner $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

(c) Donner χ_A, dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

427. (Mines Télécom 2022)
Soit A une matrice réelle carrée de taille n qui vérifie $A^2 + 3A + 3I_n = 0_n$.

(a) Montrer que A ne possède pas de valeurs propres réelles.
(b) Montrer que n est nécessairement pair.
(c) Calculer $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$.

428. (Mines Télécom 2022)
Soit $A = \begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix}$ telle que $\chi_A(x) = (x-9)^3$.

(a) A est-elle diagonalisable ?
(b) Trouver les sous-espaces propres de A.
(c) On pose $B = A - 9I_3$. Calculer B^2, B^3. *(On trouvait $B^2 \neq 0$, $B^3 = 0$.)*
(d) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à B. Montrer que $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(e) En déduire que A est semblable à une matrice triangulaire que l'on déterminera.

429. (CCINP 2022)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq n$.

(a) Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.
(b) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

430. (CCINP 2022)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$

(a) On suppose qu'il existe un projecteur q tel que $u = q \circ u - u \circ q$. Montrer que $u \circ q = 0$.
(b) Montrer que $u^2 = 0$ si et seulement si il existe un projecteur q tel que $u = q \circ u - u \circ q$.

431. (CCINP 2022)
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $P \in E$.
$f(P) = (X^2 + 1)P' - (nX + 1)P$.
Montrer que f est un endomorphisme.

432. (CCINP 2022)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D.
(b) Déterminer B telle que $B^3 = A$.

433. (CCINP 2022)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, u et v deux endomorphismes tels que

$$u^2 = ku \quad \text{et} \quad v^2 = kv$$

où k est un réel non nul.

(a) Dans le cas où u est bijectif, déterminer u.

(b) i. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u - k\,\mathrm{id}_E)$.

ii. On suppose u non injectif. Soit λ une valeur propre de u.
Montrer que $\lambda(\lambda - k) = 0$.
Quelles sont les valeurs propres de u ? Quels sont les sous-espaces propres associés ?

(c) i. Soit $z \in E$. On pose $y = z - u(\frac{1}{k}z)$. Calculer $u(y)$.

ii. Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

(d) Montrer que $(u+v)^2 = k(u+v) \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$

434. (CCINP 2022)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme non nul tel que $f^3 + f = 0$ et 0 est valeur propre de f.

(a) Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.

(b) Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Im}(f^2 + \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

(c) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
On considère l'application $g : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f ; x \mapsto f(x)$

(d) Montrer que $g^2 = -\mathrm{id}_{\operatorname{Im}(f)}$.

(e) On suppose $\dim E = 3$. Montre qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

435. (CCINP 2022)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{C}^*$.

(a) Montrer que $\operatorname{Sp}(A) = \{0, 4\}$.

(b) Montrer que A est diagonalisable.

436. (CCINP 2022)
Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X-1)$.

(a) Vérifier que Δ est un endomorphisme de E.

(b) On note $\mathcal{E} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
Vérifier que $M_{\mathcal{E}}(\Delta)$ est une matrice triangulaire supérieure et que son rang vaut n.

(c) Montrer que Δ possède une unique valeur propre et déterminer l'espace propre associé.

(d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on pose
$$u(P) = P(X+a) \quad \text{et} \quad v(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} P^{(k)}.$$
Pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$, calculer $u(X^p)$ et $v(X^p)$. En déduire l'égalité $u = v$.

(e) Pour tout $P \in E$, démontrer l'égalité
$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 - (-1)^k}{k!} P^{(k)}.$$
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $F_\alpha = \{P \in E \ ; \ \Delta(P) = \alpha P'\}$.

(f) Montrer que $F_\alpha = \{0\}$ si $\alpha \neq 2$ et que $F_2 = \mathbb{R}_1[X]$.

437. (Mines Télécom 2022)

(a) Question de cours : rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et ses caractérisations.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.
Trouver toutes les valeurs possibles pour la trace de A et le déterminant de A.

438. (CCINP 2022)
Soit un entier $n \geqslant 2$. On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(a) Prouver que M est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de M et en déduire une matrice diagonale semblable à M.

(c) Trouver une base de chaque espace propre de M.

439. (CCINP 2022)
Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation (E) suivante
$M^2 + pM + qI_n = 0$
d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On pose $\Delta = p^2 - 4q$. Vérifier l'identité
$M^2 + pM + qI_n = \left(M + \frac{p}{2} I_n\right)^2 - \frac{\Delta}{4} I_n$.
On suppose désormais que $\Delta > 0$.

(b) Montrer que résoudre (E) revient à résoudre l'équation $Y^2 = I_n$,
d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Élever la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ au carré. En déduire une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale par blocs mais pas diagonale, solution de $Y^2 = I_n$.
On considère une solution de (E), notée A, et on suppose que A n'est pas colinéaire à I_n.

(d) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M = \alpha A + \beta I_n$.

i. Montrer que l'égalité $M^2 = M$ équivaut au système
$\begin{cases} \alpha(2\beta - \alpha p - 1) = 0 \\ \beta^2 - \beta - \alpha^2 q = 0 \end{cases}$

ii. Montrer que ce problème a exactement quatre solutions. Les matrices correspondantes différentes de 0 et de I_n sont notées U et V.

iii. Calculer les produits UV et VU. Commenter.

440. (Mines Télécom 2022)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose
$u(M) = M - \mathrm{tr}(M) \cdot A$.

(a) Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Trouver les éléments propres de u (valeurs propres et espaces propres associés).

(c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

441. (CCINP 2022)
On pose : $C_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,/\, \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ M = P^{-1}M^2P\}$.

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$. Calculer A^2. Montrer que A n'est pas dans C_2.

(b) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}(B) = \{0, 1\}$. Montrer qu'elle est diagonalisable. Déterminer si B est dans C_2.

(c) Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $D = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \overline{j} \end{pmatrix}$. D est-elle dans C_2 ?

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. On pose $s = \alpha_1 + \alpha_2$ et $p = \alpha_1 \times \alpha_2$.
Calculer M^2. En déduire $\mathrm{tr}(M^2)$ et $\det(M^2)$ En déduire une C.N.S. pour que $M \in C_2$.

442. (Mines Télécom 2022)
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq 0_3$ et $M^2 = 0_3$.

(a) Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}\, M)$ et $\dim(\mathrm{Im}\, M)$.

(b) En déduire que M est semblable à $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

443. (CCINP 2022)
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que la matrice A soit diagonalisable.

444. (Mines-Télécom 2022)
On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P - P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que f est bijectif.

(b) Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Étudier la diagonalisabilité de f.

445. (Mines Télécom 2021)

(a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(b) Quelle est la trace de deux matrices semblables ? Montrez-le.

(c) p projecteur de rang r, avec $0 \leq r \leq n - 1$. Quelle est la trace de p ?

446. (Mines Télécom 2021)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$ (avec $p \geq 1$, $n \geq 1$). Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

(a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

(b) Montrer que $\mathcal{F} = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre.

(c) Montrer alors que $p \leq n$.

447. (CCINP 2021)
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

(a) Chercher une relation entre M^2 et M.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i. Chercher une relation entre A et M.

ii. Puis une relation entre A et A^2 sans M.

(b) Montrer que A est inversible et trouver l'inverse.

448. (CCINP 2021)
Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $A \times B$ n'est pas inversible.

(b) Montrer que $B \times A$ peut être inversible.

449. (CCINP 2021)
f et g sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose qu'il existe deux complexes a et b tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$. On pose, pour $h \in \mathcal{L}(E)$, $\phi_g(h) = h \circ g - g \circ h$.
Dans les quatre premières questions, on suppose $b = 0$.

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_g(f^n) = anf^n$.

(c) Montrer qu'il existe $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$. *(On raisonnera par l'absurde.)*

(d) Soit u l'endomorphisme induit par g sur $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que u admet un vecteur propre et que f et g ont des vecteurs propres communs.

(e) On considère maintenant $b \neq 0$. Montrer que f et g admettent des vecteurs propres communs *(on posera $h = af + bg$)*.

450. (Mines Télécom 2021)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit diagonalisable.

(b) Trouver, le(s) cas échéant(s), une matrice de passage.

451. (CCINP 2021)
Soit $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$. On pose $B = A^T A$.

(a) Montrer que B est diagonalisable.

(b) Montrer que 0 est valeur propre de B.

452. (CCINP 2021)
Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$.
On définit $A \otimes B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix}$.
Pour les trois premières questions, on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) B est-elle diagonalisable ? Donner $A \otimes B$ et son rang.

(b) Quel est le rang de A ? Donner les valeurs propres de A sans passer par le polynôme caractéristique.

(c) Donner les valeurs propres de $A \otimes B$.

Pour les questions suivantes, on considère $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$, $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in E_\mu(B)$. On pose $Z = \begin{pmatrix} x_1 Y \\ x_2 Y \end{pmatrix}$

(d) Exprimer $(A \otimes B)Z$ en fonction de λ, μ et Z.

(e) Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ l'est. Donner alors les valeurs propres de $A \otimes B$ en fonction des valeurs propres de A et B.

453. (CCINP 2021, CCINP 2022)

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A)$ et montrer que A n'a pas de racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à J.

i. Donner les valeurs propres de f et les s.e.v. propres associés.

ii. Montrer que $M_a = PD_aP^{-1}$ où P matrice inversible et D_a matrice diagonale. On précisera les coefficients de ces matrices.

(c) Soit H matrice réelle supposée (dans cette question seulement) racine carrée de M_a (i.e. $H^2 = M_a$) et h l'endomorphisme canoniquement associé.

i. Montrer que $HJ = JH$.

ii. Notons P_λ une colonne de P. Simplifier $HJP_\lambda = JHP_\lambda$.
En déduire que HP_λ est proportionnel à P_λ.

iii. En déduire que H est de la forme $P\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)P^{-1}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

iv. En déduire une condition nécessaire sur a pour que H existe.

(d) Pour a vérifiant cette condition nécessaire, donner une racine carrée de D_a .

(e) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'existe une matrice racine carrée de M_a dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

454. (CCINP 2021)

Soit A_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $A_n = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $d_n = \det A_n$.

(a) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (d_n).

(b) En déduire une expression de d_n en fonction de n, a, b.

455. (Mines Télécom 2021)

(a) Rappeler la formule donnant le produit d'une matrice carrée par un vecteur colonne.

(b) On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer sans calcul le rang, l'image, et le noyau de M.

(c) Toujours sans calculs, diagonaliser la matrice M.

456. (Mines Télécom 2021)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

(a) Caractériser les endomorphismes f de E tels que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(b) Soit f un tel endomorphisme. Construire une base de E dans laquelle la matrice de f est la plus simple possible (on demande en particulier qu'elle contienne le plus de zéros possibles).

457. (ENSEA 2021)
Soient A et B des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible.
Montrer que le spectre de AB est égal au spectre de BA.

458. (CCINP PSI 2019, 2022)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

(a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M, alors les valeurs propres de M sont forcément racines de P.

(b) On suppose que M est symétrique, montrer que M est diagonalisable et que $\operatorname{Tr}(M)\det(M) \neq 0$.

(c) On ne suppose plus M symétrique, montrer que M est diagonalisable.

(d) Montrer que M est inversible si et seulement si 1 ne fait pas partie de son spectre.

459. (CCINP PSI 2019)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

(a) Question de cours : montrer que si P est un polynôme annulateur de M alors les valeurs propres de M sont racines de P.

(b) Que vaut M^2 ?

(c) Cas où A est inversible et $B = A^{-1}$. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et donner la dimension des sous-espaces propres.

(d) Cas $A = \mathrm{I}_n$ et $B = -\mathrm{I}_n$. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et donner la dimension des sous-espaces propres.

460. (CCINP PSI 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}$, où $n \geqslant 3$.

(a) Quel est le rang de A ? la dimension de $\operatorname{Ker} A$?

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(c) Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?

(d) Montrer qu'il existe $\lambda \in]1, +\infty[$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1-\lambda\}$.

(e) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

461. (CCINP PSI 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout n, $u_n = \mathrm{Tr}(A^n)$.

(a) Trouver une relation vérifiée par la suite (u_n).

(b) Étudier la série $\Sigma(1/u_n)$.

Indication : Trouver un polynôme annulateur pour commencer

462. (CCINP 2019)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable et vérifiant $A^n = I_n$.

(a) Montrer que A est une symétrie.

(b) Montrer que $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable $\Leftrightarrow A = I_n$.

463. (CCINP 2019)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ avec : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$.

(b) En déduire que A possède n valeurs propres distinctes.

464. (CCINP 2019)

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \Delta$. Montrer que X et Δ commutent, puis que X est diagonale.

(b) Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

465. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et si P est dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = P'$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il injectif ?

(b) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

(c) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $g(X^k) = X^{n-k}$. Montrer que c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $h = g \circ f \circ g^{-1}$ n'est pas diagonalisable.

(d) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) + h(P) = aXP + b(X^2-1)P'$.

(e) Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ldots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $u = f + g$.

Calculer le déterminant de A.

466. (CCINP 2019)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E.

(a) Montrer que si 0 est une valeur propre de $u \circ v$, alors c'est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

Dans les questions 466b et 466c (seulement), on suppose que u et v sont bijectifs.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

i. Exprimer $\det(\alpha v - v \circ u \circ v)$ en fonction de $\det(v)$ et de $\chi_{u \circ v}(\alpha)$. Exprimer ce même nombre en fonction de $\det(v)$ et de $\chi_{v \circ u}(\alpha)$. En déduire que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

ii. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$ (et de $v \circ u$, d'après 2.a). On note E_λ l'espace propre de $u \circ v$ relativement à cette valeur propre et E'_λ l'espace propre de $v \circ u$ relativement à cette valeur propre. Montrer l'inclusion $v(E_\lambda) \subset E'_\lambda$. On admet l'inclusion $u(E'_\lambda) \subset E_\lambda$.

(c) Montrer que E_λ et E'_λ ont la même dimension. En déduire que la diagonalisabilité de $u \circ v$ implique celle de $v \circ u$.

(d) On revient au cas général et on suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\beta \operatorname{Id}_E - u \circ v$ soit bijectif. On note alors w sa bijection réciproque.
Montrer l'égalité $(\beta \operatorname{Id}_E - v \circ u) \circ (\operatorname{Id}_E + v \circ w \circ u) = \beta \operatorname{Id}_E$ et en déduire que $\beta \operatorname{Id}_E - v \circ u$ est bijectif.

(e) Montrer finalement que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

467. (CCINP 2019)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ qui est un déterminant de taille n.

(a) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$.

(b) Calculer D_n en fonction de n.

468. (CCINP 2019)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le rang de A.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

(c) Déterminer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

469. (Mines 2019)

Une matrice stochastique est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que la somme des coefficients sur chacune de ses lignes est égale à 1.

(a) Montrer que si A et B sont deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice $A \times B$ en est une aussi.

(b) Soit A une matrice stochastique. Vérifier que 1 est une valeur propre de A et que toute valeur propre complexe de A a un module inférieur ou égal à 1.

(c) Trouver toutes les matrices stochastiques A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que A^{-1} soit stochastique.

470. (CCINP 2019)
On pose $\Delta = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose l'endomorphisme $f_A : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & A^T M A \end{array} \right.$.
Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ et on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

(a) Montrer que Δ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(b) On suppose que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_A(M) = M$.
   i. Montrer que A est orthogonale.
   ii. On suppose que $\Delta = vect(I_n)$. Montrer que $A = I_n$ ou $A = -I_n$.
(c) Montrer que f_A est bijective si et seulement si A est inversible.
(d) Exprimer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$.
(e) Vérifier que l'on a bien $\Delta = vect(I_n)$.

471. (CCINP 2019, CCP 2017)
On note u l'endomorphisme canoniquement associé sur $\mathbb{C}^3$ à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Quel est le rang de $A - I_3$ et en déduire que A n'est pas diagonalisable.
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(u - 2Id)$ et $\mathrm{Ker}((u - Id)^2)$
et montrer que $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(u - 2Id) \oplus \mathrm{Ker}((u - Id)^2)$.
(c) On note v un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à une matrice X telle que $X^n = A$, avec $n \in \mathbb{N}$.
   i. Montrer que u et v commutent.
   ii. En déduire que $\mathrm{Ker}(u - 2Id)$ et $\mathrm{Ker}((u - Id)^2)$ sont stables par v.
   iii. Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, avec α dans $\mathbb{C}$ et Y dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   iv. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $YJ = JY$ et en déduire que Y est dans $\mathrm{Vect}(I_2, J)$.
   v. Trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ solutions de $X^n = A$.

472. (TPE 2019)

(a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + 3f + 2Id = 0$ est un automorphisme.
(b) Montrer par récurrence qu'il existe (a_n) et (b_n) telles que $f^n = a_n f + b_n Id$.
(c) Montrer que (a_n) vérifie une relation linéaire d'ordre 2.
(d) Calculer a_n et b_n.

473. (CCINP 2019)
Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie, vérifie $u^3 = u$, alors $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

474. (CCINP 2019)

(a) Donner une base et la dimension de $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(a) = P(b) = 0\}$ où a et b sont deux réels distincts.

(b) Pourquoi une application ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\phi(1) = 1$, $\phi(X) = 0$ et : $\forall P \in F$, $\phi(P) = 0$ existe-t-elle ?

475. (Mines Télécom 2019)
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose
$f(P) = X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) + X(X+1)P(1)$.
(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
(b) Soient $A = X(X-1),\ B = (X+1)(X-1)$ et $C = X(X+1)$. Montrer que (A, B, C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire une valeur propre et un sous-espace propre associé.
(d) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_2[X]$.
(e) Soit P un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de f. Que peut-on dire du degré de P ? Préciser l'ensemble des valeurs propres et des sous-espaces propres de f.

476. (CCINP 2019)
On définit l'application Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = (X+2)P - XP(X+1)$.
(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Soit $P \in \mathrm{Ker}\,\Phi$
    i. Calculer $P(0)$ et $P(-1)$.
    ii. Montrer qu'il existe R dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :
    $P(X) = X(X+1)R(X)$ et $R(X+1) = R(X)$.
    iii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $R(k) - R(0)$ et en déduire que R est constante.
    iv. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$.
(c) Déterminer $\mathrm{Im}\,\Phi$.
(d) Déterminer le spectre de Φ (on pourra utiliser la matrice de Φ dans la base canonique.). Φ est-il diagonalisable ?

477. (Mines Télécom 2019)
(a) Enoncer le théorème du rang.
(b) Montrer que, en dimension finie, un endomorphisme est injectif si et seulement si il est surjectif.
(c) $\phi(P) = P'$ est-il injectif sur $\mathbb{R}[X]$? Surjectif ?

478. (Mines Télécom 2019)
Montrer que f donné par $f(P)(X) = P(1)X - P(3)(25 - X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera le noyau et l'image. Déterminer les valeurs propres de f.

479. (Mines Télécom 2019)
Montrer que $\forall (A, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \det(A + X) = \det X \Leftrightarrow A = 0$.

480. (Mines Télécom 2019)
(a) $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Ecrire $\begin{cases} u_{n+1} = -\dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{2}w_n \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{5}{4}v_n - \dfrac{3}{2}w_n \\ w_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{3}{4}v_n - w_n \end{cases}$ sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire X_n en fonction de A^n et X_0.

(c) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n, et de u_0, v_0, w_0.

481. (Mines Télécom 2019)
Donner le rang, le noyau, l'image et les éléments propres de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

482. (Mines Télécom 2019)
Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

483. (CCINP 2019)
Donner le rang et une base de l'image de la matrice qui a des 1 sur les première et dernière lignes, les première et dernière colonnes, et des 0 partout ailleurs. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

484. (CCINP 2019)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ puis que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

485. (CCINP 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que A est diagonalisable. Combien de valeurs propres distinctes possède A ?

(b) Déterminer $Sp(A)$ et χ_A.

486. (CCINP 2019)
Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour f dans E, on pose $u(f) : x \mapsto \int_x^{x+1} f$.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $h_a : t \mapsto e^{at}$. Montrer que $u(h_a) = \lambda_a h_a$, avec $\lambda_a = \frac{e^a - 1}{a}$ si $a \neq 0$ et $\lambda_0 = 1$.

(b) i. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f$. Ecrire $u(f)$ en fonction de F. Montrer que $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $(u(f))'$.

ii. u est-elle surjective ?

(c) i. Montrer que f est dans $\mathrm{Ker}(u)$ si et seulement si f est 1-périodique et $\int_0^1 f = 0$.

ii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $c_k : t \mapsto \cos(2\pi k t)$ est dans $\mathrm{Ker}(u)$.

(d) Montrer que l'application $(.,.) : (f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ définit un produit scalaire sur le sous-espace des fonctions 1-périodiques de E.
Montrer que : $\forall k, l \in \mathbb{N}^*,\ k \neq l \Rightarrow (c_k, c_l) = 0$.
La dimension de $\mathrm{Ker}(u)$ est-elle finie ?

(e) Déterminer $\mathbb{R}_+ \cap Sp(u)$.

487. (Mines Télécom 2019)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f \circ f = f$.

(a) Montrer que $Im(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.
(b) Représentation géométrique de f.
(c) Montrer que f est diagonalisable.
(d) Qu'est ce qu'il en est des symétries vectorielles dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?

488. (Mines Télécom 2019, Mines Télécom 2018)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et A sa matrice associée dans une base $\mathcal{B}$.

(a) Donner la définition de u est diagonalisable et donner la version matricielle de cette définition.
(b) Donner une caractérisation de u diagonalisable.
(c) On suppose $E = \mathbb{R}$, u diagonalisable et $u^4 = Id_E$. Montrer que u est une symétrie vectorielle.
(d) On donne $tr(u) = n - 2$. Préciser le résultat précédent.

489. (TPE-EIVP 2019)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $T(P) = P(X+1) - P(X)$.

(a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Montrer que le spectre de T est $\{0\}$. Déterminer le sous-espace propre associé. T est-il diagonalisable ?
(c) Montrer que $T^{n+1} = 0$ (on pourra comparer les degrés de $T(P)$ et P pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$).
(d) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}P(X+k) = 0$
(utiliser l'endomorphisme $D = T + Id_{\mathbb{R}_n[X]}$).

490. (Mines Télécom 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Sans le moindre calcul, déterminer le rang de A, son image et son noyau.
(b) A est-elle diagonalisable ?
(c) A est-elle semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

491. (CCINP 2019)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^n = 0$.

(a) Montrer que si M est symétrique, alors $M = 0$.
(b) Montrer que si $MM^T = M^TM$, alors $M = 0$.

492. (CCINP 2019)

On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)+P(X) \end{array} \right.$.

(a) Montrer que φ est un endomorphisme.

(b) Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\varphi^k(P)$.

493. (CCINP 2019)

On pose, pour $n \geq 2$, M_n la matrice $n \times n$ constituée uniquement de 1.

Donner les valeurs propres et les s.e.v. propres.

494. (CCINP 2019)

On pose $u : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longrightarrow XP' + P$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme.

(b) En préciser les valeurs propres.

495. (Mines Télécom 2019)

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = (X^2-1)P'(X) - nXP(X)$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Pour quelles valeurs de n f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

496. (Mines Télécom 2019)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit W un sous-espace vectoriel de E.

On pose $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \,/\, W \subset \operatorname{Ker} u\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

(b) Exprimer la dimension de $\mathcal{A}$ en fonction des dimensions de E, F, W.

497. (CCINP 2019)

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A et B sont diagonalisables.

(b) Montrer que $A+B$ n'est pas diagonalisable.

(c) On note T l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

(d) Quelles sont les matrices de T qui sont diagonalisables ?

(e) Trouver un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.

(f) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.

Déterminer l'intersection $F \cap T$. En déduire l'inégalité : $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(g) Prouver que le cas d'égalité peut être réalisé.

(h) Montrer que toute matrice diagonalisable appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

498. (Mines Télécom 2019)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues dans $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
Soit T définie pour tout $f \in E$ par $T(f) = F$ avec :
$F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0,\ F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

(a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
(b) Montrer que T est un endomorphisme de E.
(c) T est-elle injective ? T est-elle surjective ?

Utiliser la première question pour déterminer s'il y a surjectivité.

499. (Mines Télécom 2019)
Soit A une matrice réelle $n \times n$ telle que $A^3 + A^2 + A = \mathrm{O}_n$.

(a) En supposant A inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n.
(b) En supposant A symétrique, montrer que A est la matrice nulle.

500. (CCINP 2019)
Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On définit f comme l'endomorphisme de E tel que :
$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(e_k) = \displaystyle\sum_{i \neq k} e_i.$

(a) Montrer que f est diagonalisable.
(b) Donner le rang de $f + \mathrm{Id}_E$.
(c) En déduire les valeurs propres de f .

501. (Mines-Télécom 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note P la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$. Montrer que P est le produit de deux matrices dont la deuxième est diagonale par blocs. En déduire la valeur de $\det(P)$.

502. (CCINP 2019)
Soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
On note $C_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \,/\, f \circ g = g \circ f\}$.

(a) Montrer que C_f est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
(b) Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\det(e_1 - x, e_2 - x)$. A quelle condition sur x la famille $(e_1 - x, e_2 - x)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
(c) n est un entier , $n \geqslant 2$. $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Condition pour que $(e_1 - x, \dots, e_n - x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$?
(d) On note $x = (x_1, \dots, x_n)$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que pour chaque i, $f(e_i) = e_i - x$.
   i. Préciser les valeurs propres de f et leur ordre de multiplicité. (On fera intervenir $S = \sum_{i=1}^n x_i$).
   ii. f est-il diagonalisable ? Préciser la dimension de C_f quand f est diagonalisable.

503. (CCP PSI 2018)
On considère l'endomorphisme $u : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & \frac{1}{3}(2M - M^T) \end{array}$

(a) Rechercher un polynôme annulateur de l'endomorphisme u.

(b) Montrer que u est diagonalisable.

(c) Calculer $\operatorname{Tr} u$ et $\det u$.

504. (CCP 2018) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $A \cdot A^T \cdot A = I_n$.

(a) Montrer que la matrice A est inversible et que A^{-1} est symétrique.

(b) Montrer que la matrice A est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

505. (CCP 2018)
Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2p+1$. Soit f un endomorphisme de E.

(a) Soit λ une valeur propre éventuelle de f. Soit x un vecteur propre associé. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $f^n(x)$.

(b) Justifier que f possède au moins une valeur propre.

(c) On fait l'hypothèse $f^3 - f^2 + f - \mathrm{id}_E = 0$. Déterminer les valeurs propres de f.

506. (CCP 2018)
On considère l'ensemble E des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) traduisant l'appartenance à E.

(b) En déduire que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

507. (CCP 2018)
$B = A^T A$ avec $A \in \mathcal{M}_{5,10}(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? Admet-elle 0 pour valeur propre ?

508. (CCP 2018)
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB - BA = B$.
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k = B^k(A + kI_n)$ et en déduire que $\det B = 0$.

509. (CCP 2018)

(a) Montrer que f, défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(X) = X - 2\operatorname{tr}(X)A$, où A est une matrice fixée non nulle, est un endomorphisme.

(b) On choisit $\operatorname{tr} A = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} f$.

(c) On choisit $\operatorname{tr} A \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et en déduire que f est injective si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq \dfrac{1}{2}$.

(d) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ quand $\operatorname{tr} A = \dfrac{1}{2}$ puis montrer que f est le projecteur sur l'ensemble des matrices de trace nulle parallèlement à $\operatorname{Vect}(A)$.

(e) On choisit $\operatorname{tr}(A) = 1$. Montrer que f est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

(f) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq 0$.

510. (CCP 2018)
Soit une matrice $M \in M_4(\mathbb{C})$, $M = [C_1, C_2, C_3, C_4]$ (C_i est la colonne n° i).
Montrer que $\det[C_1 + C_3, C_2 + C_4, C_1 - C_3, C_2 - C_4] = 4 \det M$.

511. (CCP 2018)
On définit $u(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$ pour $f \in E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(a) Montrer que pour $h_a : t \longmapsto e^{at}$, on a $u(h_a) = K_a h_a$ avec $K_a = \dfrac{e^a - 1}{a}$ pour tout $a \neq 0$.
Si $a = 0$, que vaut K_a ?

(b) Montrer que u est un endomorphisme de E. Le noyau $\mathrm{Ker}(u)$ est-il de dimension finie ?
On définit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ Exprimer $u(f)(x)$ en fonction de F.

(c) Montrer que u n'est pas surjectif.

(d) Montrer que $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $c_k : t \longmapsto \cos(2k\pi t)$. Montrer que, si $k \neq l$, alors $(c_k|c_l) = 0$.

512. (Mines Télécom 2018)
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

513. (Mines Télécom 2018)
Soit la matrice $A(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ell) & \sin(2\ell) \\ \sin(\ell) & 0 & \sin(2\ell) \\ \sin(2\ell) & \sin(\ell) & 0 \end{pmatrix}$.
Discuter de la diagonalisabilité de $A(\ell)$ suivant les valeurs de $\ell \in \mathbb{R}$.

514. (CCP 2018)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n - 1$.

(b) Quelles déductions peut on faire sur les valeurs propres de A ?

515. (CCP 2018)
Soit A la matrice diagonale réelle $A = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.
Posons $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}),\ M \longrightarrow AM - MA$.
Déterminer les valeurs propres de Φ et leur espace propre associé.

516. (CCP 2018)
Soit $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la ligne $n+1$ et de la colonne $n+1$ qui valent tous 1.
Montrer que M est diagonalisable, puis trouver ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

517. (CCP 2018, CCP 2017)
V est l'ensemble des suites$(v_n)_n$ à valeurs complexes vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = v_{n+2} + v_n$.

(a) Montrer que V est un espace vectoriel complexe.

(b) Soit $P = X^3 - X^2 - 1$.

   i. Montrer que P admet une unique racine réelle b.

ii. Montrer que P peut s'écrire $P = (X-b)(X-z)(X-\overline{z})$ où z est un complexe non réel.

(c) Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_0, v_1, v_2) \end{array}$

i. Montrer que Φ est un isomorphisme.

ii. En déduire que V est de dimension finie à préciser.

(d) Pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$, on définit la colonne $W_n = (v_n\ v_{n+1}\ v_{n+2})^T$ pour tout n entier. Donner une matrice A telle que $W_{n+1} = AW_n$ pour tout entier n.

(e) A est-elle diagonalisable ?
En déduire la forme générale des éléments de V.

518. (CCP 2018)
$f \in L(E)$ et $\dim(E) = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$.

(a) Si λ est valeur propre et x un vecteur propre associé, que vaut $f^n(x)$?

(b) Supposons que $f^3 - f^2 + f - Id_E = 0_E$.
Justifier que f admet au moins une valeur propre réelle et la donner.

519. (TPE-EIVP 2018)
Soit A une matrice antisymétrique réelle. Posons $M = I_n + A$. M est-elle inversible ?

520. (CCP 2018)
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a la famille (A, A^2) est-elle liée ?
Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

521. (Mines-Télécom 2017)

(a) Montrer que la trace est une application linéaire.

(b) Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, donner le coefficient c_{ij} de $C = AB$.

(c) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(d) Montrer que $\phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB^T)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(e) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

522. (TPE-EIVP 2017)
Pour tout λ réel, on note (E_λ) l'équation différentielle $xy' - (1+\lambda)y = 0$.

(a) Résoudre (E_λ) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On considère l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer ses éléments propres.

523. (CCP2017)
Soit p un projecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g = p + \alpha\,\mathrm{id}_E$.

(a) Calculer g^2.

(b) On suppose que g est bijectif. Trouver une expression de g^{-1}.

524. (CCP 2017)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E. On fait les hypothèses $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

(a) Calculer $\det(-\mathrm{id}_E)$. En déduire que f^2 est différent de $-\mathrm{id}_E$ puis que f n'est pas injectif.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

(d) Montrer l'existence d'un vecteur x de E tel que $f^2(x)\neq 0_E$ puis montrer que, pour un tel vecteur x, la famille $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$.

(e) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ est de dimension 2.

(f) Écrire la matrice de f dans une base bien choisie.

525. (Mines-Télécom 2017)

$A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad\\ ab & b^2 & bc & bd\\ ac & bc & c^2 & cd\\ ad & bd & cd & d^2\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

526. (CCP 2017)

Montrer que f défini par $f(M)=M+M^T$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ?

527. (CCP 2017)

Sur $E_n=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_P(M)=P^TMP+P^TM^TP$ et on note C l'ensemble des endomorphismes de E_n tels que $\varphi(M)^T=\varphi(M^T)$.

(a) Soit M inversible, montrer que M^T est inversible et exprimer son inverse en fonction de M^{-1}.

(b) Montrer que $\varphi_P\in C$ et donner $\mathrm{Ker}\,\varphi_P$ en supposant P inversible.

(c) Soient S_n l'ensemble des matrices symétriques et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que $E_n=S_n+A_n$.

(d) Montrer que tout endomorphisme $\varphi\in C$ si et seulement si $\varphi(S_n)\subset S_n$ et $\varphi(A_n)\subset A_n$.

(e) Soient $n=2$, $P=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ non inversible. Montrer que $\mathrm{tr}\,\varphi_P=2(\mathrm{tr}\,P)^2$ (on pourra considérer les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique).

(f) Déterminer C.

528. (CCP 2017)

Soit f une forme linéaire sur E, espace vectoriel de dimension n, et $a\in E$ tel que $f(a)\neq 0$.

(a) Montrer que $E=\mathrm{Ker}\,f+\mathrm{Vect}(a)$.

(b) On suppose $f(a)=1$. Montrer que $p(x)=f(x).a$ est un projecteur et donner les sous-espaces F et G tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G.

529. (CCP 2017)

On note $R_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes de taille n et vérifiant
$\exists Q\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \exists\lambda\in\mathbb{C}, Q+\lambda M\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

On donne $J_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \ddots & & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $A_n=J_n+\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}$.

(a) Calculer $\det A_2$ et $\det A_3$, puis $\det A_n$.

(b) Montrer que si D diagonale a l'un de ses coefficients diagonaux nuls, alors $D\in R_n(\mathbb{C})$.

(c) Montrer que A, diagonalisable et non inversible, est dans $R_n(\mathbb{C})$.

(d) On donne $Q_0 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$; pour $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $\det(Q_0 + \lambda M_0)$ puis montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible est dans $R_n(\mathbb{C})$.

(e) Comparer, au sens de l'inclusion, $R_n(\mathbb{C})$ et l'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

530. (CCP 2017)

Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a,b,c) \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

(a) On note $J = M(0,1,0)$. Calculer J^2. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.

(b) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?

(c) La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.

(d) La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

(e) Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$.

(f) On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a,b,c)$. Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur ? Donner alors son image et son noyau.

531. (CCP 2017)

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Calculer $\det A_n$ pour n$\geqslant 1$.

(b) Les matrices sont-elles inversibles pour tout $n \geqslant 1$?

532. (Mines Télécom 2017)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a & 1/a \\ a & 0 & 1/a^2 & 1/a^2 \\ a^2 & 1/a^2 & 0 & 1/a^3 \\ a^3 & 1/a^3 & 1/a^3 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que A^2 est combinaison linéaire de I_4 et A.

(b) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n I_4 + b_n A$.

(d) Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

533. (Mines Télécom 2017)

oit A une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 1$, inversible. Déterminer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

534. (CCP 2017)

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$R_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) | \forall \lambda \in \mathbb{C}, Q + \lambda M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})\}$,

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

(a) Calculer

i. $\det(A_2(a_1, a_2)) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$

ii. $\det(A_3(a_1, a_2, a_3)) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}$

(b) i. Calculer $\det(A_n(a_1, \ldots, a_n))$.

ii. Soit D une matrice diagonale dont la diagonale contient la valeur 0. Montrer que $D \in R_n(\mathbb{C})$.

(c) Soit A une matrice diagonalisable non inversible. Montrer que $A \in R_n(\mathbb{C})$.

(d) Soit $Q_0 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(Q_0 + \lambda M_0)$. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non-inversible appartient à $R_n(\mathbb{C})$.

(e) Soit $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et $R_n(\mathbb{C})$ pour l'inclusion.

535. (Mines Télécom 2017)

On considère la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que (U, U^2) est une famille libre.

(b) Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $U^3 = aU^2 + bU$.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U^n = \alpha_n U^2 + \beta_n U$.

(d) Exprimer α_{n+2} en fonction de α_{n+1} et α_n.

(e) En déduire une expression de α_n en fonction de n.

536. (Mines Télécom 2017)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A inversible. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

537. (CCP 2017)

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Pour tout entier n, on note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f.

(a) Donner la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines. En déduire $\operatorname{Ker} f$.

(c) Déterminer le noyau et l'image de f_n.

(d) Prouver que f est surjectif.

(e) Trouver tous les polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$.

(f) En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

538. (CCP 2017)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que f est de rang 1 et que f^2 n'est pas l'endomorphisme nul.

(a) Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans E.

(b) Montrer qu'il existe une constante λ complexe telle que $f^2 = \lambda f$.

539. (CCP 2017)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & (0) & \\ 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2.

(b) Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

540. (CCP 2017)
A est une matrice symétrique réelle telle que $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$.

(a) Montrer que A est diagonalisable.

(b) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.

(c) En déduire que $A = 0$.

541. (Mines Télécom 2017)

(a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $D = \mathrm{diag}(1, 2, 4)$.

(c) On considère l'équation : $M^2 = D$ d'inconnue M. Montrer que M et D commutent et en déduire les matrices M solutions.

(d) Résoudre l'équation : $X^2 = A$, d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

542. (CCP 2017)
Soit Eun $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension 3, f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$ (où $f^3 = f \circ f \circ f$) et $f \neq 0$.

(a) Calculer $\det(-\mathrm{Id})$; en déduire que f^2 est différent de $-\mathrm{Id}$, que f n'est pas injectif.

(b) Montrer que E est la somme directe de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ est distinct de $\{0\}$.
Soit x tel que $f^2(x) \neq 0$; montrer l'existence d'un tel vecteur x, puis montrer que $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}))$ est de dimension 2.

(e) Écrire la matrice de f dans une base bien choisie.

543. (CCP PSI 2016)
Soit A appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$ et $A \neq 0$.

(a) Trouver un polynôme annulateur de A.

(b) On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}\, A$. Déterminer $\mathrm{Sp}\, A$.

(c) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage orthogonale.

544. (CCP PSI 2016)
Soit A de $\mathfrak{M}_6(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{Tr} A = 8$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) Que peut-on dire des valeurs propres de A à partir des propriétés suivantes :
      — $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$,
      — A est inversible,
      — $\operatorname{Tr} A = 8$?
   (c) Donner une matrice D diagonale, semblable à A.
   (d) Donner tous les polynômes annulateurs de A.

545. (CCP 2016)
Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f_1, \dots, f_k$ des endomorphismes non nuls de E vérifiant :
Pour tous i et j distincts dans $[\![1, k]\!]$, $\quad f_i \circ f_j = 0$ et $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \operatorname{Id}_E$.
   (a) Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, calculer $f_i \circ (f_1 + \cdots + f_k)$. En déduire que f_i est un projecteur.
   (b) i. Justifier que la somme $\operatorname{Im} f_1 + \cdots + \operatorname{Im} f_k$ est directe.
      ii. Montrer que $E = \operatorname{Im} f_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} f_k$.
   Dans toute la suite $\mathcal{B}$ désigne une base de E adaptée à cette décomposition.
   (c) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des complexes deux à deux distincts et soit $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_k f_k$.
      i. Montrer que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
      ii. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner une expression de f^p en fonction de p, des f_i et des α_i.
   (d) i. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est libre.
      ii. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la famille $(f_i, \operatorname{Id}_E, f, \dots, f^{k-1})$ est liée.
   (e) Montrer que la famille $(\operatorname{Id}_E, f, \dots, f^{k-1})$ est libre.

546. (Mines Télécom 2016)
On note $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.
Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$. En déduire les matrices qui commutent avec A.

547. (CCP 2016)
Noyau et image de $M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

548. (CCP 2016)
A de coefficients a_{ij} donnés par $a_{in} = a_{ni} = i$, tous les autres étant nuls, est-elle diagonalisable ? Donner son spectre.

549. (EIVP 2016)
Donner le rang et les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.
Est-elle diagonalisable ?

550. (Mines Télécom 2016)

Discuter et résoudre $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$

551. (Mines Télécom 2016)

Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, vérifiant $\exists p \in \mathbb{N}^*, f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$, alors $f^n = 0$.

552. (ENSEA 2016)

On donne $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$ où x, y et z sont trois complexes.

(a) Donner l'existence de $\mathbb{C}^3$ telle que $M = CC^T$.

(b) Donner le rang de M suivant x, y et z.

(c) Montrer que M est semblable à $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on calculera a en fonction de x, y et z.

(d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

553. (ENSEA 2016)

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

554. (CCP 2016)

(a) Soit f un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie E. Établir une relation entre le rang et la trace de f.

(b) Soit f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} f = \operatorname{tr} f = 1$. Montrer que f est un projecteur.

555. (Mines Télécom 2016)

Soit $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.
Soit θ l'application linéaire qui, au polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$,
associe $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{n+1}))$.

(a) Montrez que θ est un isomorphisme.

(b) Soit $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base naturelle de $\mathbb{K}^{n+1}$; on définit $L_i = \theta^{-1}(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Explicitez L_i.

(c) La famille $(L_1, \dots, , L_{n+1})$ est elle une base de $\mathbb{K}_n[X]$?

Pensez à factoriser L_i par ses racines

556. (CCP 2016)

Montrer que 0 est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$ et donner la dimension du sous-espace propre associé. A est-elle diagonalisable ?

557. (CCP 2016)

(a) Montrer que $\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^k M = A^{k-1} M\}$, où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrer que $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

(b) On choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver Γ_1, Γ_2, Γ_3.

(c) Montrer que, si A est inversible, $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Étudier la réciproque.

(d) On note $u_k = \dim \Gamma_k$. Montrer que (u_k) est croissante et qu'il existe un plus petit entier p tel que $u_p = u_{p+1}$.

(e) Montrer que $p = 2$ si A est diagonalisable et admet 0 pour valeur propre.

558. (CCP 2016)
$C = \{\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})), \phi(M)^T = \phi(M^T)\}$, $\phi_P(M) = P^T M P + P^T M^T P$ où P est donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si M est inversible, M^T l'est aussi et exprimer $(M^T)^{-1}$ en fonction de M^{-1}. Montrer que $\phi_P \in C$ et trouver $\operatorname{Ker} \phi_P$ quand P est inversible.

(b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'espace $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques et de celui $\mathcal{A}_n$ des matrices antisymétriques.

(c) Montrer que $\phi \in C$ si et seulement si $\phi(A_n) \subset A_n$ et $\phi(S_n) \subset S_n$.

(d) On choisit $n = 2$ et P ni nulle ni inversible ; montrer que $\operatorname{tr}(\phi_P(M)) = 2\operatorname{tr}(\phi(M))^2$

559. (CCP 2016)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Posons $r = \operatorname{rg} u$.

(a) Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Montrer que $n \geqslant 2r$.

(b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de u soit : $\begin{pmatrix} \mathrm{O}_{r,n-r} & I_r \\ \mathrm{O}_{n-r,n-r} & \mathrm{O}_{n-r,r} \end{pmatrix}$ que l'on peut noter abusivement $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & I_r \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$.

560. (CCP 2015)
Soit a appartenant à $\mathbb{R}^*$, f_a un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont M_a est la représentation matricielle dans la base canonique :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2a+1 & -a \\ 4a & 4a & -2a+1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $\det(M_a)$. En déduire que f_a est bijective.

(b) Determiner les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f_a. f_a est-il diagonalisable ?

(c) Montrer que $\operatorname{Ker}(f_a - Id)$est un plan de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $Im(f_a - Id)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(f_a - Id)$.

Soit E un espace euclidien de dimension $n, , n \geq 2$, soit u et v non nuls appartenant à E. On définit f qui à x dans E associe $x + (x|v)u$

(d) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(e) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - Id)$ est de dimension $n - 1$ et déterminer $Im(f - Id)$.

(f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de f . f est-il diagonalisable ?

(g) Montrer que $Im(f-Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f-Id)$.

(h) Montrer que la matrice de f dans une certaine base peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) On définit une transvection par les deux conditions :

— $Im(f-Id)$ est inclus dans $\text{Ker}(f-Id)$

— $\text{Ker}(f-Id)$ est un sous-espace de dimension $n-1$

Montrer que toute transvection peut se représenter matriciellement sous la forme de la question précédente.

561. (Télécom SudParis 2015)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E supposé diagonalisable.

Quelles conditions sur les valeurs propres de f en font un endomorphisme cyclique ?

Note : f est cyclique ssi : il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ soit une base de E.

562. (Mines Télécom 2015)

soit la matrice carrée de taille n

1 1 .... 1 1

1 0 .... 0 1

....

1 0 .... 0 1

1 1 .... 1 1

exemple : n=4 donne : $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

Montrer que la matrice est diagonalisable et identifier les couples valeurs propres / vecteurs propres.

563. (TPE-EIVP 2015)

Soient f et g deux endomorphisme tel que $f \circ g \circ f = f$

(a) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs. Montrer que $Im(f) = Im(f \circ g)$ et $Ker(f) = Ker(g \circ f)$.

(b) Soient les propositions suivantes :

i. $f \circ g \circ f = f$

ii. $g \circ f \circ g = g$

iii. $rg(f) = rg(g)$

Montrer que i et ii entrainent iii et iii et i entrainent ii

564. (Mines-Télécom 2015)

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

M est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Donner une matrice de passage qui diagonalise M.

(b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(R)$, on note $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

Montrer que B est semblable à $C = \begin{pmatrix} 3A & O \\ O & -A \end{pmatrix}$.

(c) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

565. (CCP 2015)

Soit f un endomorphisme de $R[X]$ tel que $\forall P \in R[X]$, $f(P) = Q$ où $Q = P(X+1) - P(X)$.

(a) On définit $f_n \in L(R_n[X])$ où $\forall P \in R_n[X], f_n(P) = f(P)$.
Donner la matrice de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ $(1, X, X^2, X^3)$.

(b) $Soit P \in Ker(f)$.

i. Montrer que $P - 0$ admet une infinité de racines.

ii. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) i. Déterminer l'image et le noyau de f_n.

ii. En déduire que f est surjective.

(d) Déterminer tous les P∈ R[X] tels que P(X+1)-P(X)=X^2

(e) H=$P \in R[X] / \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on admet que H et Ker(f) sont supplémentaires dans R[X].
Montrer que $\forall Q \in R[X], \exists! P \in R[X]$ tel que P(X+1)-P(X) = Q et $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

566. (CCP 2015)

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice M est p nilpotente (avec $p \in \mathbb{N}^*$) si $M^p = 0$.

(a) Mq U est 3-nilpotente

(b) i. Soit A une matrice m-nilpotente. Mq $P^{-1}AP$ est m-nilpotente

ii. Parmi les matrices nilpotentes, lesquelles sont inversibles ?

(c) i. Soit A une matrice 3-nilpotente. Mq $I_n + A$ est inversible

ii. Mq $I_n + aA$ est inversible (où a est un réel)

567. (Mines Télécom 2015)

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie ainsi :
$a_{i,i} = 2\cos(\theta)$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$,
$a_{n,n} = \cos(\theta)$,
$a_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$,
$a_{i,j} = 0$ dans tous les autres cas.
Calculer $\det(A_n)$.

568. (Mines Télécom 2015)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires sauf si $f^2 = 0$ et f n'est pas nul.

569. (Mines Télécom 2015)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

(b) Trouver toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(A, I_2)$.

570. (Mines Télécom 2015)
Soit $f\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X-1)(X-2)P' - 2XP \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme.

(b) Donner ses éléments propres.

571. (Mines Télécom 2015)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On admet la relation $A^2 + A - 2I_3 = 0$.

(b) i. Montrer que A est inversible, et donner A^{-1}.
ii. Donner les valeurs propres de A.
iii. Déterminer les sous-espaces propres de A.
iv. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(c) Trouver les suites (x_n), (y_n) et (z_n) vérifiant
$$\begin{cases} x_0 &= 1, \\ y_0 &= 2, \\ z_0 &= 3, \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= -x_n + y_n + z_n, \\ y_{n+1} &= x_n - y_n + z_n, \\ z_{n+1} &= x_n + y_n - z_n. \end{cases}$$

572. (CCP 2015)

(a) Montrer que f défini par $f(P)(X) = \dfrac{X^2 - 1}{2} P''(X) - XP'(X) + P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On choisit $n = 3$; donner la matrice de f dans la base canonique et montrer que c'est un projecteur.

(c) Donner son noyau et son image.

(d) On revient au cas général ; montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(X, 1 + X^2)$

(e) Montrer que $Q \in \mathrm{Im}\, f$ si et seulement si $Q'(1) = Q'(-1) = 0$ et donner une base de $\mathrm{Im}\, f$.

(f) Quelles sont les valeurs propres de f ? Est-il diagonalisable ?

573. (CCP 2015)

(a) Montrer que T, définie sur l'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $T(f)(0) = f(0)$ et $T(f)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire.

(b) Montrer que $T(f)$ est continue en 0 puis que T un endomorphisme de E.

(c) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T.

(d) Soit λ une valeur propre de T, de vecteur propre associé f ; montrer que f est solution de $y' - \dfrac{1-\lambda}{\lambda x} y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que le spectre de T est $]0, 1]$.

574. (CCP 2015)

(a) Montrer que l'ensemble E des $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel dont on donnera une base.

(b) Trouver un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

575. (CCP 2015)

(a) Montrer que, si M est réelle, carrée d'ordre n et nilpotente, elle n'est pas inversible, admet 0 comme unique valeur propre et sera diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$; montrer que, si tous les b_i sont nuls, M est diagonalisable si et seulement si tous les a_i sont nuls.

(d) On suppose tous les a_i nuls ; donner une CNS pour que M soit diagonalisable.

(e) Montrer que M admet au plus deux valeurs propres complexes non nulles.

576. (CCP 2015)

On note D_n le déterminant de la matrice carrée de taille n, dont la diagonale est composée de 4, les sur et sous diagonales de 2, les autres coefficients étant nuls.

(a) Trouver une relation entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n.

(b) Calculer D_n.

(c) La matrice associée est-elle inversible ?

577. (CCP 2015)

A complexe, carrée d'ordre $n \geq 3$, de rang 2, de trace nulle et telle que $A - I_n$ ne soit pas inversible, admet-elle 0 pour valeur propre ?

Donner le cardinal de son spectre. Est-elle diagonalisable ?

578. (CCP 2015)

(a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que l'ensemble F_λ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AM = \lambda M$ est un espace vectoriel.

(b) Trouver une base de F_λ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Montrer que si λ n'est pas valeur propre de A, F_λ est réduit à 0.

(d) Montrer que si λ est valeur propre de A, F_λ n'est pas réduit à 0 (on pourra choisir une matrice M dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la première qu'on choisira astucieusement).

(e) Montrer que $\dim F_\lambda = n \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ (on pourra construire une matrice M en fonction des vecteurs propres de A).

(f) Montrer que si A est diagonalisable, ϕ_A défini par $\phi_A(M) = AM$, l'est aussi.

579. (CCP 2015)

Soient s une symétrie distincte de $\pm Id$ d'un espace E de dimension n et ϕ défini sur $\mathcal{L}(E)$ par $\phi(f) = \dfrac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$.

(a) Calculer $\phi(Id)$ et $\phi(s)$.

(b) Montrer que ϕ est une endomorphisme.

(c) Donner une relation entre E et les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} de s, associés aux valeurs propres 1 et -1.

(d) Montrer que $f \in \operatorname{Ker} \phi \Leftrightarrow f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$.

(e) Soit f un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ ; donner, pour $x \in E_1$ puis pour $x \in E_{-1}$, une relation entre $f(x)$ et $s \circ f(x)$.

(f) Montrer qu'il existe f non nul tel que $f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$.

(g) Montrer que les valeurs propres de ϕ sont -1, 0 et 1.

580. (CCP 2015)

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{ch} x$, $g(x) = x \operatorname{sh} x$ et F le sous-espace vectoriel engendré par ch, sh, f et g.

(a) Justifier que toute fonction h de F admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le donner explicitement.

(b) Justifier que $B = (\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, f, g)$ est libre dans E. Quelle est la dimension de F ?

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in F$, on pose $T_\lambda(h)(x) = xh''(x) - \lambda h'(x) - xh(x)$.
Montrer que T_λ est un endomorphisme de B dont on donnera la matrice dans B.

(d) Montrer que T_λ est bijectif si et seulement si $\lambda \notin \{0, 2\}$.

(e) Déterminer le noyau et l'image de T_2.

(f) Résoudre $xy'' - 2y' - xy = \operatorname{ch} x$ dans F.

581. (TPE-EIVP 2015)

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; calculer A^n.

(b) On définit la suite (u_n) par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et $u_{n+2} = -2u_n + 3u_{n+1}$.

(c) Exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1. La suite converge-t-elle ?

582. (TPE-EIVP 2015)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes C_1, ..., C_n et B de colonnes $K_i = \sum\limits_{j \neq i} C_j$.

Calculer le déterminant de B en fonction de celui de A pour $n = 3$, puis pour tout $n \neq 0$.

583. (TPE-EIVP 2015)

(a) Montrer que, si f et g sont deux endomorphismes vérifiant $f \circ g \circ f = f$, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

(b) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ g)$ et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

(c) Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

(d) Montrer réciproquement que si $f \circ g \circ f = f$ et $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$ alors $g \circ f \circ g = g$.

584. (TPE-EIVP 2015)

(a) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, tel que $u^3 = -u$.

(b) Montrer que, si λ est valeur propre de u, $\lambda^3 = -\lambda$.

(c) Quelles sont les valeurs propres réelles de u ? Est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

(d) Montrer que $\operatorname{Ker} u$ est en somme directe avec $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.

(e) Montrer que si F est stable par u et v la restriction de u à F, alors $v^2 = -\operatorname{id}$.

585. (TPE-EIVP 2015)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que si $A^2+A+I_n = 0$, alors n est pair et que si $A^3+A^2+A = 0$, alors $\operatorname{rg} A$ est pair.

586. (Télécom SudParis 2015)
On dit qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n est cyclique, s'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.
Soit f un endomorphisme de E diagonalisable : à quelle(s) condition(s) sur ses valeurs propres est-il cyclique ?

587. (CCP 2015)

$$\text{Soit } D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Trouver une relation de récurrence vérifiée par D_n et le calculer.

588. (CCP 2015)

(a) Donner la matrice F dans la base canonique de l'endomorphisme f qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = P'$.

(b) Donner le spectre de f ; est-il diagonalisable ?

(c) Montrer que g défini par $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $g(X^{n-k}) = X^k$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) $h = g \circ f \circ g^{-1}$ est-il diagonalisable ? Écrire sa matrice H dans la base canonique.

(e) Trouver a et b tels que $f(P)(X) + h(P)(X) = aXP + b(X^2-1)P'$.

(f) Calculer $\det(h+f)$.

589. (CCP 2015)

(a) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A qui a des 1 sur la première et la dernière ligne, sur la première et la dernière colonne, sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

(b) Est-elle diagonalisable ?

(c) Quelle est la dimension du sous espace propre associé à 1 ?

(d) Quelles sont les autres valeurs propres ?

590. (CCP 2015)

(a) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables et que $A+B$ ne l'est pas.

(b) Montrer que l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

(c) Quelles sont les matrices de T diagonalisables ?

(d) Montrer que l'ensemble F des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas réduit à la matrice nulle et que $\dim F \cap T \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

591. (CCP 2015)

(a) Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension n.

(b) Montrer que T, défini par $T(v) = u \circ v - v \circ u$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(c) On choisit $n = 2$, $B = (e_1, e_2)$ une base de E, $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.

(d) Donner la matrice de u dans B, vérifier qu'il est nilpotent et donner son indice de nilpotence.

(e) Déterminer son noyau et son image ; sont-ils supplémentaires ?

(f) Calculer $T^2(v)$ en fonction de u et v, puis calculer $T^3(v)$ et en déduire que T est nilpotent d'un indice à déterminer

592. (CCP 2015)

(a) Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $f^3 + f = 0$.

(b) Calculer $\det(-Id)$ et montrer que $f^2 - Id$.

(c) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + Id)$ et que $\operatorname{Ker}(f^2 + Id)\{0\}$.

(d) Montrer que si x est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f^2 + Id)$, $\big(x, f(x)\big)$ en est une famille libre.

(e) Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition de E.

(f) Montrer une égalité faisant intervenir le rang de la somme de fonctions composées.

593. (CCP 2015)

(a) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Exprimer C^{2k} et C^{2k+1} en fonction de k, C et C^2.

(c) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (k+1)C^k$ est combinaison linéaire de I_3, C et C^2.

(d) Donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} x^n$ et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

(e) Mêmes questions pour $f_1(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$ et $f_2(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} (2n+1)x^{2n}$.

(f) Montrer que (S_n) converge vers une fonction f que l'on exprimera en fonction de k, C et C^2.

(g) Calculer $(I_3 + C)^2 S$ et donner une autre valeur de S.

594. (CCP 2015)

(a) $M_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (-1)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & (-1)^n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Donner les valeurs propres de M_2.

(c) Montrer que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M_3 et donner la valeur propre associée.

Donner les valeurs propres de M_3.

(d) Donner les coefficients diagonaux de M_n^2 et sa trace.

(e) Quel lien y a-t-il entre la trace et les valeurs propres ?

(f) Pour $n = 2p$, montrer que -2 et 0 sont valeurs propres d'ordre au moins égal à $p-1$.

(g) Si $n \geq 4$, combien de valeurs propres reste-t-il à trouver ?

(h) Écrire un système reliant les valeurs propres de M_{2p}, sa trace et la trace de M_{2p^2}.

(i) Trouver toutes les valeurs propres de M_n.

595. (CCP 2015)

(a) Soit ϕ non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

(b) Montrer que si $\phi(I_n) = 0$ alors ϕ est nulle et en déduire que $\phi(I_n) = 1$.

(c) Montrer que si A et B sont semblables, $\phi(A) = \phi(B)$.

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on pose $\psi(a, b, c, d) = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$.

(d) Si $f(x) = \psi(\mathrm{e}^x, 0, 0, 1)$, montrer que $f(x+t) = f(x)f(t)$.

(e) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ où α est une constante à déterminer.

(f) Soient deux réels strictement positifs λ et μ ; montrer que $f(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1\lambda_2)^\alpha$.

(g) Soient $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ toutes deux carrées d'ordre n ; quel est le rang de J_rK_r ? Montrer qu'elles sont semblables.

(h) On suppose $\phi(A) \neq 0$; montrer que $\phi(J_r) = 0$ pour tout $r < n$ et en déduire que A est inversible.

596. (CCP 2015)

Montrer que si A est une matrice symétrique réelle de taille n vérifiant $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_n$, alors $A^2 = I_n$.

597. (CCP 2015)

(a) Montrer qu'une matrice d'ordre impair à coefficients réels admet au moins une valeur propre réelle.

(b) Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair à coefficients réels n'admet que 0 pour valeur propre et que son polynôme caractéristique est impair.

598. (CCP 2015)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1/a & 1 & a & a^2 \\ 1/a^2 & 1/a & 1 & a \\ 1/a^3 & 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$; calculer M^2 et montrer que ses valeurs propres sont dans $\{0, 4\}$.

599. (CCP 2015)

Si A symétrique, réelle, d'ordre n vérifie $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_n$, a-t-on $A^2 = I_n$?

600. (CCP 2015)

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A = 0$, $\operatorname{rg} A = 2$ et $A - I_n$ est non inversible.

(b) Montrer que 0 est valeur propre de A et donner son ordre de multiplicité.

(c) Trouver toutes les valeurs propres de A.

601. (CCP 2015)

(a) On définit D et t sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $D(P) = P'$ et $t(P)(X) = P(X+1)$.

(b) On note $C(D)$ le commutant de D dans $\mathbb{R}[X]$; montrer que $t \in \mathbb{C}(D)$.

(c) On pose $e_k = \dfrac{X^k}{k!}$; calculer $D^i(e_n)$ et en déduire que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Montrer que $(Id, D, D^2, \dots, D^n)$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

(e) Soit $u \in C(D)$; montrer qu'il existe $(b_0, \dots, b_n)$ tels que $u(e_n) = \displaystyle\sum_{k=0^n} b_k D^k(e_n)$ et en déduire que $u\big(D^i(e_n)\big) = \displaystyle\sum_{k=0^n} b_k D^k \circ D^i(e_n)$.

(f) Montrer que $C(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ dont on donnera la dimension.

602. (CCP 2015)
Soit $n \geq 2$.

(a) Montrer que 0 est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $rg(A) = 1$.

(b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

603. (CCP 2015)

(a) On suppose qu'il existe un endomorphisme f non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $f^2 = 0$.

(b) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

(c) Rappeler le théorème du rang et en déduire que $\operatorname{rg} f \leq 2$.

(d) Justifier, si f est un endomorphisme de rang 1, l'existence de 4 vecteurs $b, c, d, f(d)$ de $\mathbb{R}^4$, tels que $f(d)$ soit une base de $\operatorname{Im} f$ et que $\big(f(d), b, c\big)$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$.

(e) $\big(f(d), b, c, d\big)$ peut-elle être une base de $\mathbb{R}^4$?

(f) Écrire la matrice de f dans cette base.

(g) Montrer que, si f est de rang 2, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ et qu'il existe une base de la forme $\big(f(u), f(v)\big)$ de $\operatorname{Im} f$.

(h) Trouver une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Écrire matriciellement les endomorphismes satisfaisant la condition $f^2 = 0$.

(j) Montrer que la comatrice M de chacune de ces matrices vérifie aussi $M^2 = 0$

604. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels, est 3-nilpotente.

(b) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est m-nilpotente, $m \leq n$, $P^{-1}AP$ l'est aussi, pour toute matrice inversible P. Quelles matrices nilpotentes sont inversibles ?

(c) Montrer que si A est 3-nilpotente, $A + I_n$ est inversible (on pourra chercher l'inverse sous la forme d'un combinaison linéaire de I_n, A et A^2).

(d) Montrer que, pour tout réel non nul α, $A + \alpha I_n$ est inversible.

(e) Montrer que A nilpotente est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(f) Pour A m-nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\exp A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} A^k$; montrer que $\exp A$ est inversible.

605. (CCP 2015)

(a) On note E l'espace vectoriel de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que ϕ défini par $\phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$ est un endomorphisme de E.

(c) Résoudre $y' - xy = 0$ et en déduire $\operatorname{Ker} \phi$. Est-il injectif ? Surjectif ?

(d) Soit $g(x) = (1 + x^2)\mathrm{e}^{x^2}$; résoudre $y' - xy = g(x)$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^x (1 + t^2)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

(e) Montrer que $f(x) = h(x)\mathrm{e}^x$ vérifie $\phi(f) = g$ et $f(0) = 0$ pour une fonction h que l'on explicitera et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^x (1 + t^2)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

(f) ϕ induit-il un endomorphisme sur le sous-espace P des fonctions polynomiales ? Si oui, sa restriction est-elle injective ? Surjective ?

606. (CCP 2015)

Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et une base de son image.

607. (CCP 2015)

(a) Pour A fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que f défini par $f(M) = -M + \operatorname{tr}(M)A$ est un endomorphisme.

(b) Si $\operatorname{tr}(A) = 1$, montrer que $\operatorname{Ker} f = Vect(A)$ et $\operatorname{Im} f = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

(c) On suppose $\operatorname{tr}(A)1$; trouver une relation entre $f^2(X)$, $f(X)$ et X et en déduire que f est bijective puis exprimer f^{-1}.

(d) Résoudre $f(X) = B$.

(e) Montrer qu'il existe $(E_2, \ldots, E_{n^2})$ telles que $(A, E_2, \ldots, E_{n^2})$ soit une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(f) Trouver une CNS sur $\operatorname{tr}(A)$ pour que f soit diagonalisable.

608. (CCP 2015)

ϕ_n, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi_n(P)(X) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} P(1 + X\cos t)\,\mathrm{d}t$, est-il diagonalisable ? Si elle existe, trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{tr}(\phi_n)$.

609. (CCP 2015)

(a) La matrice A dont les coefficients a_{ij} vérifient $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i1} = a_{1i} = a_{ii} = 1$ est-elle diagonalisable (on pourra s'intéresser à $A - I_n$) ?

(b) En déduire le polynôme caractéristique de A.

610. (CCP 2015)

(a) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^T = M^2$, alors $M^4 = M$.

(b) Quelles sont les valeurs possibles de $\det M$? Montrer que $Sp(M) \subset \{0, 1\}$.

(c) Montrer que si M est inversible, elle est aussi orthogonale.

(d) Si M n'est pas inversible, on suppose M semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $b \in \{0, 1\}$; que peut-on dire si $b = 0$?

(e) Montrer que si $b = 1$, M est diagonalisable et que $M^2 = M$; qu'en déduit-on ?

611. (CCP 2015)

Montrer que le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est de la forme $X^{n-2}(X + \lambda)(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

612. (CCP 2015)
Soient deux endomorphismes u et v d'un espace vectoriel E.
Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u \circ v \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

613. (CCP 2015)
Montrer que $f(P) = P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

614. (CCP 2015)

(a) Soit f un endomorphisme de E, espace de dimension finie, tel que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$.

(b) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$; $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$; $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

615. (CCP 2015)

(a) Montrer que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a pour polynôme caractéristique :

(b) $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} M + \det M$.

(c) Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose qu'il existe un complexe z_0 tel que $A + z_0 B$ admette une unique valeur propre et soit diagonalisable.

(d) Montrer que $A = -z_0 B + \alpha I_2$.

(e) On suppose que, pour tout complexe z, $A + zB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable ; Montrer que le déterminant $\Delta(z)$ de $A + zB$ est un polynôme qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}$.

(f) Montrer que le coefficient de z^2 est $a_2 = \operatorname{tr}(B)^2 - 4 \det B$.
Manque fin.

616. (CCP 2015)

(a) On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(b) Pour $f \in E$, on pose $D(x) = xf'(x)$ et $\phi_n(x) = x^n$. On admet que D est un endomorphisme de E.

(c) Calculer $D^k(\phi_n)$ pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ puis trouver les noyaux de D, D^2 et D^3.

(d) Montrer que $\sum n a_n x^n$ et $\sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence R.

(e) Montrer que $S(x) = \sum a_n x^n$ est dans E puis que $D^k\big(S(x)\big)$ est aussi une série entière.

(f) Pour $P \in \mathbb{R}_r[X]$, donner une expression simple de $P(D)(S)$.

(g) On choisit $I =]0,1[$ et $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_n de degré n tel que $D^k(f) = P_n f^{k+1}$.
Manque dernière question.

617. (CCP 2015)
Soient u et v linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ respectivement, telles que $u \circ v$ est un projecteur de rang 2. Montrer que $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$.

618. (CCP 2015)
   (a) Montrer que des suites réelles u vérifiant $u_{n+4} = 2u_{n+3} + 11u_{n+2} - 12u_{n+1} - 36u_n$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note E cet espace.
   (b) On admet que ϕ, défini par $\phi(u) = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^4$; quelle est la dimension de E ?
   (c) Montrer que T défini par $T(u) = v$ avec $v_n = u_{n+1}$ est un endomorphisme de E.
   (d) Montrer que $(T + 2Id)^2 \circ (T - 3Id)^2 = 0$, puis que si λ est valeur propre de T, elle est racine de $(x+2)^2(x-3)^2$; en déduire les éléments propres de T.
   (e) Est-il diagonalisable ?
   (f) Montrer, sans détermination préalable, que $\operatorname{Ker}(T + 2Id)^2 \cap \operatorname{Ker}(T - 3Id)^2 = \{0\}$, $\operatorname{Im}(T - 3Id)^2 \subset \operatorname{Ker}(T - 3Id)^2$ puis, après avoir rappelé le théorème du rang, que $E = \operatorname{Ker}(T + 2Id)^2 \oplus \operatorname{Ker}(T - 3Id)^2$.
   (g) Donner une base de E.

619. (Navale 2015)
Montrer que f défini par $f(P)(X) = XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera le spectre. Est-il diagonalisable ?

620. (Navale 2015)
Donner le rang de la matrice réelle, carrée de taille n, de coefficient $a_{ij} = (n + i + j - 2)^2$.

621. (Navale 2015)
Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que $AB - BA = I_n$.
Montrer que si $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.

622. (Mines Télécom 2015)
Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (m-1)x + my + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 3 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}$.

623. (Mines Télécom 2015)
Soient deux matrices A et B, carrées d'ordre n, à coefficients entiers et telles que $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $\det(A + kB) = \pm 1$; déterminer $\det A$ et $\det B$.

624. (Mines Télécom 2015)
$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

625. (Mines Télécom 2015)
   (a) Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; calculer A^n.

(b) On donne $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\begin{cases} u_{n+1} = -6u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = 5u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = 6u_n + 2v_n + 5w_n \end{cases}$.

Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0.

626. (Mines Télécom 2015)
Soit $A = (a_{ij}) =\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $a_{i1} = a_{nj} = 1$, $a_{n1} = 1$, tous les autres étant nuls. A est-elle diagonalisable ? Calculer A^n.

627. (Mines Télécom 2015)
Que peut-on dire de A symétrique, réelle et nilpotente ?

628. (Mines Télécom 2015)

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(b) Calculer A^n. A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

629. (Mines Télécom 2015)
Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Trouver son image et son noyau avec un minimum de calculs.
Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser,
sinon, dire si elle est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

630. (Mines Télécom 2015)
Donner, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
Est-elle inversible ? Diagonalisable ?

631. (Mines Télécom 2015)
Résoudre l'équation $AB - BA = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

632. (Mines Télécom 2015)
Soit A symétrique, réelle, de taille n, telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.
Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de A et en déduire que $A = 0$.

633. (Mines Télécom 2015)
$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ est-ellle diagonalisable ?

634. (Mines Télécom 2015)

(a) Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, x+y+z-t=0 \right\}$ est un sous espace vectoriel dont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base.

(b) Montrer que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+t \\ 2x+2y+z+t \\ x-y+z-t \end{pmatrix}$ est linéaire, donner son rang et son noyau.
Est-ce un isomorphisme ?

635. (Mines Télécom 2015)
Calculer $D_n = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos a \end{vmatrix}$.

636. (Mines Télécom 2015)
Montrer que A symétrique réelle et vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$ admet 0 pour unique valeur propre et en déduire que $A = 0$.

637. (Mines Télécom 2015)

(a) Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Donner, avec un minimum de calculs, l'image et le noyau de A.

(c) Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

638. (Mines Télécom 2015)
Décrire l'endomorphisme$f$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

IV.6 Algèbre bilinéaire

639. (CCINP 2023)
Soit E un espace euclidien, $g \in \mathcal{O}(E)$ et $f = g - \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)^\perp$

640. (CCINP 2023) (Titem)
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^T \times S \times M = S$.

(a) Montrer que M est inversible.

(b) On suppose $\det(M) = 1$ et n impair.
Montrer que 1 est valeur propre de M.

641. (CCINP 2023) (Antoine, Clément, Lison)

Soit $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que M est une matrice de projection.

(b) Trouver des bases orthonormées de ses sous-espaces propres.

642. (CCINP 2023) (Mattéo)

(a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) Soit $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. B est-elle orthogonale ? Si oui, est-ce une matrice de réflexion ou de rotation ?

643. (CCINP 2023)

Soit E un espace euclidien et $(a, b) \in E^2$ une famille libre de vecteurs unitaires.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & (x|a)b + (x|b)a \end{array}$

(a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(a, b)^\perp$.

(c) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$.

(d) Évaluer $\varphi(a + b)$ et $\varphi(a - b)$; φ est-il diagonalisable ?

644. (CCINP 2023)

(a) On pose $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$.
Vérifier que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et que Q est strictement positive.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et on pose $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}$.

  i. Exprimer Q'.

  ii. À l'aide de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0)$.

  i. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire.

  ii. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

  iii. Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire. Ce nombre est noté u_n.

(d) Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-1/n}$.
Pour cela, on donne le développement asymptotique $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o(n)$.

645. (CCINP 2022)

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. On pose $(f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)g(t)\mathrm{d}t$, pour tous $f, g \in E$.

(a) Montrer que E est un espace préhilbertien réel.
(b) Calculer $\| \cos \|^2$.
(c) Orthonormaliser $(\cos, \sin)$.

646. (CCINP 2022)
Soit E un espace euclidien tel que $\dim E > 3$.
On pose $f : x \mapsto \langle u|x\rangle u + \langle v|x\rangle v$, où (u, v) est une famille libre de E.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme.
   (b) Trouver $\operatorname{Ker} f$.
   (c) *Question sur la diagonalisabilité : Justifier que f est diagonalisable ?*

647. (CCINP 2022)
Dans $E = \mathbb{R}^4$ euclidien canonique, F est le s.e.v. de F d'équation $(x, y, z, t) \in E \,/\, x + y + t = 0$ et $z = 0$.
Déterminer une base orthonormée de F.

648. (Mines Télécom 2022)
On considère la matrice $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.
Caractériser géométriquement cette matrice.

649. (CCINP 2022)
Dans un espace euclidien E, on dit d'un endomorphisme f qu'il est antisymétrique ssi : $\forall x, y \in E,\ (f(x)|y) = -(x|f(y))$. Soit f un endomorphisme antisymétrique.
   (a) Montrer que $(f(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$. En déduire que le spectre de f est inclus dans $\{0\}$.
   (b) Montrer que l'endomorphisme f^2 est autoadjoint et que son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_-$.
   (c) En considérant son signe, donner le déterminant de f^2 lorsque $\dim E$ est impaire.

650. (CCINP 2021)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\delta = AA^T - A^T A$.
   (a) δ est-elle diagonalisable ?
   (b) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de δ (comptées avec multiplicité). On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geq 0$.
   Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \leq \operatorname{tr}(\delta)$.
   (c) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0$.

651. (CCINP 2021)
Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On définit $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ par $\quad \forall x \in E \quad f_\alpha(x) = x + \alpha(x|a)a$.
   (a) Soit $(e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\operatorname{Vect}(a)^\perp$. Montrer que $\mathcal{B} = (a, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.
   (b) i. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer $f_\alpha \circ f_\beta$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha \circ f_\beta = f_\gamma$, et exprimer γ en fonction de α et β.
      ii. A quelle condition sur α l'application f_α appartient-elle à $\mathcal{GL}(E)$? On montrera qu'alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha^{-1} = f_\theta$, et l'on exprimera θ en fonction de α.

(c) Soit $s_a : x \in E \longmapsto x - 2(x|a)a$. On suppose trouvé un sous-espace vectoriel V de E vérifiant $s_a(V) = V$.

i. Montrer que $s_a \in \mathcal{O}(E)$.

ii. Montrer que $s_a(V^\perp) \subset V^\perp$, puis que $s_a(V^\perp) = V^\perp$.

(d) Soit $g \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$.

(e) Soit $b \in E$ tel que (a, b) soit libre et $\|b\| = 1$. Montrer que $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a \iff (a|b) = 0$.

652. (Mines Télécom 2021)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\alpha \in \mathbb{R}$, et a un vecteur unitaire de E. On pose $f_\alpha(x) = x - \alpha \langle x, a \rangle \cdot a$.

(a) Montrer que f_α est un endomorphisme de E. Que dire de f_0 ?

(b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $f_\alpha \circ f_\beta = f_\gamma$. En déduire pour quelles valeurs de α, f_α est un automorphisme. Lorsque tel est le cas, préciser f_α^{-1}.

(c) Montrer que f_α est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.

653. (CCINP 2021)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On rappelle qu'un endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque : $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$

(a) On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

i. Montrer que A est antisymétrique, et donner $f(a, b, c)$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

ii. Montrer que f est antisymétrique.

iii. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux. Déterminer $\operatorname{rg} f$.

On revient désormais au cas général.

(b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

i. Montrer que u est antisymétrique si et seulement sa matrice dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.

ii. Montrer, à l'aide du déterminant, que si u est antisymétrique et bijectif, alors $\dim(E)$ est paire.

iii. Montrer que si u est antisymétrique, alors $\operatorname{rg} u$ est pair.

654. (CCINP 2021)

Soit E un espace euclidien tel que $\dim E \geq 3$. Soit $(u, v) \in E^2$ avec (u, v) libre et $f : x \mapsto \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u$.

(a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Montrer que $\operatorname{Vect}(u, v)$ est stable par E.

(c) Soit $g = f_{|\operatorname{Vect}(u,v)}$. Quelle est la matrice de g dans la base (u, v) ?

655. (CCINP 2019)

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $h : x \mapsto x \ln(x)$ définie sur $]0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : x \mapsto x^n$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_{a,b} : x \mapsto x^2(\ln(x) - a - bx)^2$, définie sur $]0, 1]$. On pose $F = \operatorname{Vect}(P_1, P_2)$. On munit E du produit scalaire défini par : $\forall f, g \in E,\ (f, g) = \int_0^1 fg$.

(a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{a,b}$ peut être considérée comme une fonction de E.

(b) Montrer que h peut être considérée comme une fonction de E. Calculer (h, P_n) pour tout n de $\mathbb{N}$.

(c) Calculer (P_1, P_2), $\|P_1\|$ et $\|P_2\|$.

(d) Trouver λ et μ tels que $Q_1 = \lambda P_1$ et $Q_2 = \frac{P_2-\mu P_1}{\|P_2-\mu P_1\|}$ forment une base orthonormée de F. Donner l'expression de la projection orthogonale de h sur F en fonction de Q_1 et Q_2. On notera g ce projeté.

(e) On propose une autre méthode pour déterminer g.
Chercher $g = aP_1 + bP_2$ tel que $\int_0^1 x(h-g)(x)dx = 0 = \int_0^1 x^2(h-g)(x)dx$.

(f) Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 x^2(\ln(x) - a - bx)^2 dx$.

656. (CCINP 2019)
Soient $(E, (.,.))$ un espace euclidien, $g \in O(E)$ et $f = id_E - g$.
Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f) \subset (\mathrm{Ker}(f))^\perp$, puis l'égalité.

657. (CCINP 2019)
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.

(a) Donner une base de F et une base de $F^\perp$.

(b) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

(c) Déterminer la distance de $(1, 2, 3)$ à F.

658. (CCINP 2019)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $AA^TA = I_n$.

(a) Montrer que A est symétrique.

(b) Montrer que $A = I_n$.

659. (CCINP 2019)
Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On pose pour $P, Q \in E$: $(P, Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$.

(a) Montrer que $(.,.)$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Soit $f : P \mapsto (X-\alpha)P'(\alpha)$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

660. (CCINP 2019)

(a) Montrer que h cononiquement associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie
$(P) : \forall x \in \mathbb{R}^3, < h(x), x >= \|x^2\|$.

(b) Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie (P) et $g = f - Id$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^3, < g(x), x >= 0$.

(c) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g et montrer que $0 \in Sp(g)$ en analysant le degré du polynôme caractéristique.

(d) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^3,\ < g(y), x > + < y, g(x) >= 0$ et que $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont orthogonaux.

(e) On note e_1 un vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}\, g$, e_2 un vecteur unitaire de $\mathrm{Im}\, g$; montrer que $g(e_2) \neq 0$ et que si $e_3 = \frac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$, (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

661. (CCINP 2019)

(a) Montrer que $f_A(M) = AM - MA$ où $A \in S_n(\mathbb{R})$ est fixée, est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) Si (X, Y) est dans $(\mathbb{R}^n)^2$, quelle est la taille de XY^T ? Expliciter ses coefficients en fonctions de ceux de X et Y.
(c) Montrer que l'on peut trouver X et Y tels que XY^T soit vecteur propre de f_A et donner la valeur propre associée ; en déduire que f_A n'est pas bijectif.
(d) Montrer qu'il existe une famille $(M_1, \ldots, M_n)$ de vecteurs propres de A tels que : $\forall i \neq j,\ M_i^T M_j = 0$.
(e) Montrer que f_A est diagonalisable et que $\dim \operatorname{Ker} f_A \geq n$.
(f) Donner les valeurs propres de f_A si tous les coefficients de A valent 1.

662. (Mines Télécom 2019)
Montrer que, si $e_1, \ldots, e_n$ sont des vecteurs unitaires de E euclidien, tels que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$, alors ils constituent une base orthonormale.

663. (Mines Télécom 2019)
(a) Montrer que f, défini par $f(P)(X) = 2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera les valeurs propres.
(b) Montrer que f est symétrique pour le produit scalaire $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.à

664. (CCINP 2019)
Donner une base orthonormale de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, z = 0, x + y + t = 0\}$.
Expliquer comment obtenir la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

665. (CCINP 2019)
(a) Montrer que $(A|B) = \operatorname{tr}(A^T B)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
(b) Montrer que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique puis que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
(c) En déduire que $A^T A = A^2 \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$.
(d) Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $n \geq 3$, il existe A non symétrique et telle que $A^T A = A^2$ (on les cherchera sous la forme VU^T avec U et V dans $\mathbb{C}^n$).
(e) On choisit $n = 2$. Montrer que toutes les solutions à coefficients complexes de $A^T A = A^2$ sont symétriques.

666. (CCINP 2019)
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.
(a) Donner une base de F et $F^\perp$.
(b) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

667. (Mines Télécom 2019)
Soit $E = \mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et u une isométrie vectorielle.
(a) Définir une isométrie vectorielle.
(b) Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? Justifier.
(c) u admet-il nécessairement une ou des valeurs propres réelles ? Justifier.

(d) La matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Caractériser géométriquement u.

668. (CCINP 2019)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait les hypothèses $A^2 = A$ et $A^T = A$.

(a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A)$.

(b) Montrer que $\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}$.

Indication : on pourra penser au produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

669. (Mines Télécom 2019)
Soit E un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E. On fait l'hypothèse
$\forall x \in E, \quad (x|f(x)) = 0$.

(a) Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, montrer l'égalité $(x|f(y)) = -(y|f(x))$.

(b) Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.

(c) Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{0\}$.

(d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

670. (CCINP 2019)
On note u le vecteur $(1, 0, -3)$ de $\mathbb{R}^3$, que l'on munit de son produit scalaire canonique. On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathrm{Vect}(u)$ et q le projecteur orthogonal sur l'orthogonal de cette droite.

(a) Déterminer la matrice représentative de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer une relation entre p et q.

(c) En déduire la matrice représentative de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

671. (CCINP 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$.

(a) Montrer que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow S = \pm 1 \text{ et } \sigma = 0$.

(b) Préciser une condition pour $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

672. (CCINP 2019, CCP 2018)
Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soit f un endomorphisme de E tel que : $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

(a) $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}$, calculer $(f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j))$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|f(e_i)\| = \alpha$.

673. (CCP 2018)
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$. On définit le produit scalaire dans E par
$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. On note $\|.\|$ la norme associée. Sur E, on définit également $\varphi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt$ et $f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X$.

(a) i. Montrer que φ est linéaire.

ii. On admet que f_α est un endomorphisme de E. Pour cette question, on suppose $n=3$. Donner la matrice A_α de f_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

iii. Déterminer le spectre de f_α, en déduire si f_α est bijective ou non. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?

(b) On définit l'endomorphisme g_α sur E par $g_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)$.

i. Donner le rang de φ. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.

ii. Donner le spectre de g_α. Est-il diagonalisable ? Bijectif ?

iii. Montrer que : $\forall P \in E,\ \|g_\alpha(P)\| \leq (1+2|\alpha|)\|P\|$.

iv. En déduire qu'il existe M tel que $M = \sup_{P\in E\setminus\{0\}}\left(\frac{\|g_1(P)\|}{\|P\|}\right)$. Donner la valeur de M.

674. (CCP 2018)
Soit (a,b) une famille libre de E euclidien de dimension n.

(a) Montrer que $\phi(x) = \langle x,b\rangle a + \langle x,a\rangle b$ est un endomorphisme de E dont on donnera le noyau et l'image.

(b) Trouver les valeurs propres de ϕ. Est-il diagonalisable ? Est-il symétrique ?

675. (CCP 2018)
On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$

On définit un produit scalaire dans E par $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Sur E on définit également $\varphi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$ et $f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X$

(a) i. Montrer que φ est linéaire.

ii. On admet que f_α est un endomorphisme de E. Pour cette question on suppose $n=3$. Donner la matrice A_α de f_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

iii. Donner le spectre de f_α, en déduire si f_α est bijectif ou non. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?
On définit l'endomorphisme g_α sur E par $g_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)$.

(b) i. Donner le rang de φ. Montrer que $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathbb{R}_0[X]$.

ii. Donner le spectre de g_α, est-il diagonalisable ? Bijectif ?

iii. Montrer que $\|g_\alpha(P)\| \leq (1+2|\alpha|)\,\|P\|$

iv. En déduire qu'il existe M tel que $M = \displaystyle\sup_{P\in E, P\neq 0}\left(\frac{\|g_1(P)\|}{\|P\|}\right)$. Donner la valeur de M.

676. (TPE-EIVP 2018)
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $P, Q \in E$ on pose $(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

(a) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

(b) Calculer la distance entre le polynôme X^2 et le sous espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$

677. (CCP 2018)
On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(M|N) = \mathrm{tr}(M^T N)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x - 1 & 4 \\ -2 & \mathrm{sh}x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x + 1 & 3 \\ 6 & -\mathrm{sh}x \end{pmatrix}$.

(a) A-t-on $(A|B) = 0$?

(b) Montrer que l'espace des matrices symétriques et celui des antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Déterminer la distance de A à l'espace des symétriques.

678. (CCP 2018)

Soit $E = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad / \quad \sum x_n^2 \text{ converge}\right\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & x_0 \end{array}$.

(a) Calculer $(|a| - |b|)^2$, et montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|$.

(b) i. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ii. Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

(c) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \end{array}$.

Montrer que φ est bien définie sur $E \times E$ et que φ est un produit scalaire sur E.

En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$ est une norme sur E.

(d) On suppose que E muni de cette norme. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, alors $(x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

(e) Soit $g : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E^2$,

$\|g((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) - g((y_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \leqslant k\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|$.

679. (CCP 2018)

On se place dans $\mathbb{R}^4$, on définit le plan $\mathcal{P}$ par $\left\{\begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ x - y - 2z - t = 0 \end{array}\right.$.

Trouver une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$ et déterminer la distance du vecteur $u = (1, 0, -1, 0)$ au plan $\mathcal{P}$.

680. (TPE-EIVP 2018)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(M, N) \in E^2$, on pose $\Phi(M, N) = \mathrm{tr}(M^T N)$.

(a) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E ; on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

(b) Montrer que $\quad \forall (M, N) \in E^2 \quad \|MN\| \leqslant \|M\|\,\|N\|$.

L'examinatrice a de plus demandé une idée de la preuve de Cauchy-Schwarz.

681. (CCP 2018)

E est un espace euclidien et a, b deux vecteurs de E orthogonaux entre eux.

(a) Soit $\varphi : x \mapsto x + \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.

(b) On se place dans un espace euclidien de dimension 3 et on se donne une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $a \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et $b \in \mathrm{Vect}(e_2)$. Préciser la matrice M de φ dans cette base.

(c) Préciser les éléments propres de φ et déterminer $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

(d) Généraliser l'étude à un espace de dimension n

682. (Mines-Télécom 2017)

(a) Montrer que $P : x+y+z=0$ et $D : x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice de la projection sur P parallèlement à D.

683. (Mines-Télécom 2017)

(a) Donner la forme de la matrice de $u(x)=\langle x,a\rangle a+\langle x,b\rangle b$ dans une base quelconque de E euclidien, sachant que a et b ne sont pas colinéaires.

(b) Déterminer le noyau et l'image de u. Est-il symétrique ?

684. (EIVP 2017)

(a) Montrer que u défini par $u(x)=k\langle x,a\rangle a+x$, où $a\in E$ euclidien et $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, est un endomorphisme symétrique, que l'on exprimera en fonction de Id et du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(a)$.

(b) Donner une condition sur k pour que u soit une isométrie.

685. (EIVP 2017)

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (x^2-ax-b)^2\mathrm{d}x$.

686. (CCP 2017)

(a) Montrer que $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de f de $M=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&-4&8\\4&7&4\\9&-4&-1\end{pmatrix}$ dans la base canonique

(b) Trouver $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}_+^{*3}$ tels que $v_1=\dfrac{1}{\alpha}u_1$, $v_2=\dfrac{1}{\beta}\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ et $v_3=\dfrac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

(c) On note H la droite dirigée par v_1.
Calculer $\langle f(v_2),v_1\rangle$, $\langle f(v_3),v_1\rangle$ et montrer que $H^\perp$ est stable par f.

(d) Montrer que dans la base (v_1,v_2,v_3), f a pour matrice $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-9&0&0\\0&7&4\sqrt{2}\\0&-4\sqrt{2}&7\end{pmatrix}$.

(e) Montrer que M n'est pas diagonalisable.

(f) En étudiant $f\circ r_1$, où r_1 est la réflexion par rapport au plan engendré par v_1 et v_3, montrer que f est la composée de deux symétries.

(g) Montrer que f ne peux pas être la composée de deux réflexions.

687. (CCP 2017)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que ϕ, définie par $\phi(P)=\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t$ est linéaire, déterminer son rang et montrer que $(\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp=\mathbb{R}_0[X]$.

(b) Montrer que f_a, définie par $f_a(P)(X) = P(X) + 2a\phi(P)X$ est un endomorphisme dont on donnera la matrice dans la base canonique si $n = 3$.

(c) Est-il diagonalisable ? Bijectif ?

(d) Donner les valeurs propres de g_a défini par $g_a(P) = P + 2a\phi(P)$.

(e) Est-il diagonalisable ? Bijectif ?

688. (TPE-EIVP 2017)
Soit dans un e.v.eu. f telle que : $f(0) = 0$ et pour tout couple de vecteurs x, y
$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

(a) Montrer que f conserve la norme.

(b) Montrer que f conserve le produit scalaire.

(c) Montrer que f est linéaire.

(d) Que peut-on conclure sur f ?

689. (Mines Télécom 2017)
E est un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, a, b sont deux vecteurs de E non colinéaires.
f est l'application $x \in E \longmapsto \langle x, a\rangle a + \langle x, b\rangle b$.

(a) Donner le format de la matrice de f dans une base quelconque de E.

(b) Déterminer le noyau et l'image de f.

(c) f est-elle symétrique ?

690. (Mines Télécom 2017)
Soit E un espace vectoriel Euclidien de dimension p supérieure ou égale à 1. Soit $B = (u_1, \ldots, u_p)$ une base orthogonale de E. Donner l'expression du projecteur orthogonal d'un vecteur x de E sur F, un sous-espace vectoriel de E. Des éléments de démonstration sont attendus.

691. (CCP 2016)
Soit E un espace euclidien. Soient a et b des vecteurs de E avec a et b non nuls.
Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x - \langle a, x\rangle b \end{array}$

(a) Montrer que : f bijective $\Leftrightarrow \langle a, b\rangle \neq 1$.

(b) Dans le cas f bijective, calculer f^{-1}.

692. (EIVP 2016)
Soit f endomorphisme de E euclidien tel que $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.

(a) Calculer $\langle u + v, u - v\rangle$ où u et v sont deux vecteurs unitaires.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.

(c) Conclure qu'il existe une isométrie g telle que $f = \alpha g$.

693. (TPE-EIVP 2016)
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien telle que
$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x)^2$.
Démontrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E

694. (Mines Télécom 2016)
Soit $E = \{f$ continue sur $\mathbb{R}, f$ 2π-périodique$\}$.

(a) On pose $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour (f,g) dans E^2 ; montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) Soit $F = \mathrm{Vect}(\cos, x \mapsto \cos(2x))$; trouver le projeté orthogonal sur F de $x \mapsto \sin^2 x$.

695. (Mines Télécom 2016)

Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que l'intégrale est bien définie.

(b) Vérifier que $(P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(c) Si $n \in \mathbb{N}$, on note T_n l'unique polynôme tel que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout réel θ. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

696. (CCP 2016)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère p le projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$. Déterminer la matrice de p, la projection orthogonale sur le plan P, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à P à partir de celle de la projection.

697. (TPE-EIVP 2015)

Soit $E = R_{2n}[X]$ et on admet que pour $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2n} a_k b_k$ est un produit scalaire sur E.

(a) Montrer que $H = \{P \in E, \int_1^2 P(t)dt = 0\}$ est un *sev*, et trouver sa dimension.

(b) Déterminer $H^{\perp} et\ d(1,H)$

698. (Mines Télécom 2015)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$. On note $[a]$ la colonne des coordonnées du vecteur a dans la base $\mathcal{B}$. Soit $a \in E$, différent du vecteur nul.

(a) Montrer que $M = \frac{1}{[a]^T[a]}[a][a]^T$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(a)$.

(b) Écrire en fonction de M la matrice de :

i. la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(a)$;

ii. la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$;

iii. le projecteur orthogonal par rapport à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$.

699. (CCP 2015)

Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ euclidien de matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique ? On précisera ses éléments caractéristiques.

700. (CCP 2015)

Montrer que f, définie sur E euclidien par $f(x) = x - (a|x)b$, où a et b sont deux vecteurs non nuls de E, est un endomorphisme et qu'il est bijectif si et seulement si $(a|b) \neq 1$.

701. (CCP 2015)

Soit f un endomorphisme de E euclidien qui conserve l'orthogonalité.

(a) Montrer que si x et y sont unitaires et vérifient $< x+y, x-y >= 0$ alors $\|f(x)\| = \|f(y)\|$.

(b) Montrer que $\exists k > 0$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

702. (CCP 2015)

(a) Rappeler la définition d'un produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) On note $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $P_n = \sqrt{n}(1-X)^{2n}$.

(c) Calculer $\|P_n\|$ et montrer qu'on ne peut pas trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $< P, Q >= P(0)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

703. (CCP 2015)

Montrer que $< P, Q >= \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$; y a-t-il un problème en 1 ?

704. (CCP 2015)

On munit $\mathbb{R}^3$ euclidien muni de sa base canonique.

(a) Déterminer une base orthonormale de $P : x + y + z = 0$.

(b) Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P ?

705. (CCP 2015)

(a) Montrer que $s = f \circ f$ où f est bijective sur E euclidien et vérifie $\forall (x, y) \in E^2, - < f(x)|y >=< x|f(y) >$, est un endomorphisme symétrique.

(b) Montrer que si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, $f(x)$ en est un autre.

(c) Montrer que $\lambda\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$; qu'en déduit-on ?

(d) Montrer que si $F = Vect\big(x, f(x)\big)$, F et $F^{\perp}$ sont stables par f.

(e) Soit g l'endomorphisme induit par f sur F ; montrer qu'il existe une base B de F dans laquelle g a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ où a est à exprimer en fonction de λ.

(f) On suppose que si V est le sous-espace propre associé à λ, il existe m vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ de V tels que $\big(x_1, f(x_1), \ldots, x_m, f(x_m)\big)$ soit une base de V.

(g) Montrer que E est de dimension paire.

(h) Vérifier l'hypothèse faite.

706. (CCP 2015)

(a) Soient ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique et $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose $f(x) =< x|\phi(x) > -2 < x|u >$.

(b) Vérifier que $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$ et montrer que f admet $x_0 = (2, 1)$ pour point critique.

(c) Montrer que $f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha h_1^2 + \beta h_2^2 - \gamma h_1 h_2$ où α, β et γ sont des réels à expliciter.

(d) On se place dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ et on suppose que ϕ est tel que $< x|\phi(x) >$ soit strictement positif pour tout x non nul.

(e) Justifier que ϕ est un endomorphisme et donner le signe de ses valeurs propres.

707. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Montrer que, pour ce produit scalaire, $\big((X^2-1)^n\big)^{(n)} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

708. (CCP 2015)

(a) Montrer que $\phi(A,B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $f(M) = AM^T A$, pour A fixée, est un endomorphisme symétrique dont on déterminera les valeurs propres ; est-il diagonalisable ?

709. (CCP 2015)

Soient E euclidien et F le sous-espace engendré par la famille $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs unitaires de E.

Montrer que, si $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2$, alors $F^\perp = \{0\}$ et $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E.

710. (ENSIIE 2015)

Calculer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \,\mathrm{d}x$.

V Probabilités

711. (CCINP 2023) (Zoheir)

N personnes se répartissent au hasard, et indépendamment les uns des autres, dans 3 logements ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3. On note X_i le nombre de personnes dans le logement i.

(a) Déterminer la loi de X_i.

(b) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

(c) Déterminer $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$ *(en utilisant la variance).*

712. (CCINP 2023) (Iman)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(a)$ et $Y \sim \mathcal{P}(b)$.

Déterminer la loi de $X + Y$ de deux manières différentes.

713. (CCINP 2023)

On considère N urnes numérotés de 1 à N. Dans l'urne i il y a i boules numérotées de 1 à i. On choisit au hasard successivement une urne, puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée.

Donner la loi de X.

714. (Mines Télécom 2022)

Soit X une variable aléatoire telle que $G_X(t) = \dfrac{1}{2 - t^2}$.

(a) Montrer que G_X est développable en série entière et déterminer la loi de X.

(b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

(c) Trouver la loi de $\dfrac{X}{2}$. Calculer son espérance et sa variance.

715. (Mines Télécom 2022)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et noires. U_1 contient 75% de boules blanches et U_2 contient 50% de boules blanches. Il y a trois fois plus de boules dans U_1 que dans U_2.

On transvase le contenu des deux urnes dans une urne U_3.

On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité que la boule blanche soit issue de U_1 ?

716. (Mines Télécom 2022)
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

(a) Rappeler la loi de X et son espérance.
(b) Trouver la loi de V et son espérance.
(c) Que vaut $U + V$? En déduire l'espérance de U.

717. (CCINP 2022)

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -4 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.
A quelle condition sur x M possède-t-elle deux valeurs propres distinctes ?
(b) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.
On pose $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes ?

718. (CCINP 2022)
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n + 2) = 4P(X = n + 1) - P(X = n).$$

Déterminer la loi de X.

719. (CCINP 2022)
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$. $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$. X et Y indépendantes
$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

(a) Quelle est la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible ?
(b) Quelle est la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable ?

720. (CCINP 2022)
Une urne contient n boules : m boules blanches et $n - m$ boules noires, où $m \in [\![1, n - 1]\!]$.
On effectue des tirages successifs et indépendants. Lorsqu'on tire une boule, on la remplace dans l'urne par une boule de l'autre couleur.
On note X_k le nombre de boules blanches après k tirages.

(a) Déterminer la loi de X_1.
(b) Exprimer $P(X_{k+1} = i)$ en fonction de $P(X_k = i + 1)$ et $P(X_k = i - 1)$.
(c) On pose $G_k(t) = \sum_{i=0}^{n} P(X_k = i)t^i$ la fonction génératrice de X_k.
   i. Que vaut $G_k(1)$? Exprimer $E(X_k)$ à l'aide de G'_k.
   ii. Exprimer $G'_{k+1}(t)$ à l'aide de G_k et G'_k. *(Formule donnée ?)*
   iii. En déduire une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$.
   iv. Exprimer $E(X_k)$ en fonction de k.

721. (Mines Télécom 2022)
On lance six dés équilibrés et indépendants. On lance les dés une première fois et on regarde le résultat. On relance les dés qui n'ont pas donné de 6, et ainsi de suite. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour que chaque dé ait donné un 6.

(a) Loi de X ? On pourra commencer par déterminer $P(X \geqslant k)$.

(b) X admet-elle une espérance, une variance ?

722. (CCINP 2022)
Soit $\lambda > 0$. On considère une variable aléatoire X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et on pose $Y = (-1)^X$.
1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que Y possède une espérance et calculer cette espérance.

723. (CCINP 2021)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$, avec $\alpha > 1$.

(a) Quelle est la probabilité que X soit pair ?

(b) Quelle est la probabilité que X soit un multiple de 3 ?

724. (CCINP 2021)
Soit $p \in]0, 1[$. On lance une pièce, avec p la probabilité d'obtenir Face.
Soit N le numéro du lancer auquel on obtient pour la première fois Face.
Trouver la loi de N et son espérance.

725. (CCINP 2021)
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, Y_n = X_n X_{n+1}$.

(a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.

(b) Les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ? *Indication : on pourra calculer leur covariance.*

726. (CCINP 2021)
Des personnes se transmettent à la file une information. La première personne reçoit l'information exacte ; ensuite, chaque personne transmet fidèlement l'information (telle qu'elle l'a reçue, donc pouvant ou non être correcte) avec la probabilité p, ou transmet l'information contraire de celle qu'elle a reçue avec la probabilité $1 - p$.
On note A_n l'événement "la n-ième personne reçoit correctement l'information initiale", et l'on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.
Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, puis exprimer p_n en fonction de n.

727. (CCINP 2021)
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, telles que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis l'on choisit, toujours au hasard, une boule dans cette urne.

(a) Soit N le numéro de l'urne choisie ; donner la loi et l'espérance de N.

(b) Soit X le numéro de la boule choisie ; donner la loi et l'espérance de X.

728. (CCINP 2021)

(a) Soit Y une variable aléatoire discrète telle que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = \dfrac{5}{3}$.
Calculer p_0, p_1, p_2, où $p_k = P(Y = k)$.

(b) Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
On suppose connaître $E(X), E(X^2), \ldots, E(X^n)$.
Comment faire pour calculer $p_0, p_1, \ldots, p_n$?

729. (CCINP 2019)

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (identiquement distribuées), telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, pour n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $E(\sin(tX_k))$ et $E(\cos(tX_k))$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(\cos(tS_n)) = (\cos t)^n$.

730. (TPE 2019)

On lance 3600 fois on dé ; montrer que la probabilité que le nombre de 1 soit compris entre 480 et 720 vaut au moins 0.96.

731. (CCINP 2019)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y = (-1)^X$.

732. (CCINP 2019)

Au péage d'autoroute, 12 guichets sont ouverts. Les voitures qui se présentent à ce péage se répartissent aléatoirement sur ces guichets, indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de voitures arrivant au péage au cours d'une journée et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note Y le nombre de voitures se présentant au guichet numéro 12.

(a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

733. (CCINP 2019)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi qui admettent une espérance et une variance. On suppose $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

(a) Calculer $E(X - Y)$ et exprimer $V(X - Y)$ en fonction de $V(X)$.

(b) i. Montrer que $P(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)^2$.

ii. Calculer $P(X = Y)$ si X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

(c) Dans cette question, X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

i. Calculer $P(X = Y)$.

ii. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

(d) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$, alors $P(X = Y) \geq \frac{1}{n}$.

(e) Montrer que $P(X = Y) \geq 1 - 2V(X)$

734. (CCINP 2019, CCP 2017)

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi $G_N(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = pq^k$, avec $q = 1 - p$. On note $X \hookrightarrow G_N(p)$.

(a) Soit $X \hookrightarrow G_N(p)$ et $S = X + 1$. Quelle est la loi suivie par S ? En déduire l'espérance de X.

(b) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $G_N(p)$. On note
$Z = \min(X, Y)$. Montrer que pour tout entier n, on a : $P(X \geq n) = q^n$. En déduire $P(Z \geq n)$. Déterminer la loi de Z et donner son espérance.

(c) On lance une pièce avec une probabilité de faire Pile égale à $p \in]0, 1[$. Pour tout entier i, on note F_i l'événement : « on obtient Face au i-ème lancer ». Soit T la variable aléatoire qui donne le nombre de Face avant le premier Pile. Exprimer $(T = k)$ en fonction des F_i. Déterminer la loi et l'espérance de T.

(d) On reprend $X \hookrightarrow G_N(p)$ et $Y \hookrightarrow G_N(p)$ indépendantes. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = |X - Y|$. Calculer $P(M = k, D = i)$ (on pourra différencier les cas $i = 0$ et $i \geq 1$). En déduire la loi de D.

735. (CCINP 2019)
Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $1 - \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Pour $D \in \mathbb{N}$, $D > 2$, on note A_D l'évènement « X est un multiple de D ». Donner la probabilité de A_D.

736. (CCINP 2019)
Une urne contient une boule blanche et une noire ; à chaque tirage, on ajoute une boule de même couleur que celle tirée. On note respectivement B_k et N_k les évènements « on a tiré une boule blanche (noire) au k-ième tirage ».

Quelle est la probabilité de l'évènement « la première boule noire tirée l'est au rang k » ?

Quelle est la probabilité qu'on ne tire jamais de boule noire ?

737. (CCINP 2019)
On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note P_n l'événement « on obtient pile au n-ème lancer » et F_n l'événement « on obtient face au n-ème lancer ».
On note Y la variable aléatoire donnant le premier rang d'apparition de la séquence PPF (le rang est le rang du face), Y étant égale à 0 si cette séquence n'apparaît jamais.
On pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ si $n \geq 3$, puis $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$ et $u_n = P(U_n)$, avec $u_1 = u_2 = 0$.

(a) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone, et en déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

(b) Calculer $P(B_n)$. Montrer que B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles. Calculer u_3, u_4 et u_5.

(c) Montrer que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Exprimer $P(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de u_{n-2}.

(d) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$. Calculer ℓ.

(e) Calculer $P(Y = 0)$ et commenter.

738. (Mines Télécom 2019)
Si X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$, que vaut $P(X_1 = X_2 = X_3)$?

739. (CCINP 2019)
X et Y, variables aléatoires indépendantes, suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Donner les lois de $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Quelle est la loi conjointe de (U, V) ?

740. (CCINP 2019, CCINP 2023)

(a) Donner les variations de $\phi(x) = -x \ln(x)$ sur $]0, 1]$ et montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.

(b) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(X = n) \neq 0$.

Lorsque $\sum \phi(p_n)$ converge, on dit que X admet une entropie $H(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \phi(p_n)$.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$. En déduire que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, 0 \leq -\sqrt{p_n} \ln p_n \leq 1$.

(c) Montrer que si X suit une loi géométrique, elle admet une entropie et la calculer.

(d) Dans le cas général, on suppose que X admet une espérance.
Montrer, à l'aide de l'inégalité établie, que
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \phi(p_n) \leq \max\{\frac{1}{n^{3/2}}, 3p_n \ln(n)\}$.

(e) Montrer que X admet une entropie.

741. (CCINP 2019)
On donne deux variables aléatoires X et Y, définies sur Ω et telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!2^{j+1}}$, $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a puis les lois marginales de X et Y.

742. (CCP 2017, CCINP 2019)
Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois géométriques de paramètre p_1 et p_2.
Soit $Z = \min(X, Y)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Z > n)$.

(b) Déterminer la loi de Z.

743. (Mines Télécom 2019)
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

744. (Mines Télécom 2019)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r.d. telle que $\forall n \in \mathbb{N},\quad X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $np_n \to \lambda$ où $\lambda > 0$.

(a) Donner $P(X_n = k)$ pour $k, n \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ la limite de $P(X_n = k)$ lorsque $n \to \infty$

745. (Mines Télécom 2019)

(a) Rappeler la loi de Poisson. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance (avec démonstration).

(b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

746. (CCP 2018)
On note classiquement $j = e^{2i\pi/3}$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $S_k = 1 + j^k + j^{2k}$.

(b) Soit X une variable aléatoire suivante une loi de Poisson de paramètre 1. On note Y le reste de la division euclidienne de X par 3.
Que vaut $\mathbb{P}(Y = 0)$? Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

747. (Mines Télécom 2018)
Un animal se déplace entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve en A.
Lorsqu'il a bu toute l'eau d'un point, il se déplace vers l'un des deux autres avec la même probabilité.
On considère que l'eau se régénère après qu'il est parti du point d'eau.
On note :
$a_n = P($"l'animal est en A à $t = n$"$)$
$b_n = P($"l'animal est en B à $t = n$"$)$
$c_n = P($"l'animal est en C à $t = n$"$)$.

(a) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.
De même pour b_{n+1} et c_{n+1}.

(b) On note $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

i. Justifier que A est diagonalisable.

ii. Justifier que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A.

iii. Trouver D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

(c) Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n.

748. (Mines Télécom 2018)

Soit 2 urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires.

On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2.

Soit l'événement : B_n : "tirer une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage" et $P_n = P(B_n)$.

(a) Calculer P_1.

(b) Calculer P_{n+1} en fonction de P_n.

(c) Calculer P_n en fonction de n.

749. (Mines Télécom 2017)

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, de même loi $\mathcal{G}(p)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer l'événement $(X_1 - X_2 = n)$ comme réunion disjointe d'événements, de manière à calculer sa probabilité.

(b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'égalité $P(X_1 - X_2 = n) = P(X_2 - X_1 = n)$. En déduire la loi de $X_1 - X_2$.

(c) On suppose que X_1 et X_2 représentent le temps d'attente à deux guichets de gare distincts. Comment interpréter l'événement $(X_1 - X_2 > 0)$?

750. (EIVP 2017)

On donne une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

(a) Trouver a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

(b) Déterminer α tel que $P(X = k) = \dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$ et donner la loi de X.

(c) X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, la (les) calculer.

751. (EIVP 2017)

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un système complet d'événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ vérifie $P(A_1) = \dfrac{1}{2n}$ et $(P(A_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est arithmétique.

(a) Déterminer $P(A_i)$, $1 \leq i \leq n$.

(b) Déterminer $P(B)$ où B est un événement tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], P(B|A_i) = \dfrac{i}{2n}$.

752. (CCP 2017)

Une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Calculer $E(S_n)$, $V(S_n)$ et montrer que $\lim \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - 2p\right| \leq \varepsilon\right) = 0$.

753. (Mines Télécom 2017)

Peut-on truquer deux dés (à 6 faces) de telle sorte que la somme suive une loi uniforme ?

Indication : On pourra utiliser les fonctions génératrices

754. (TPE-EIVP 2016)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire sans remise une à une les boules. On note X_i la vard égale à 1 si la i-ème boule tirée porte le numéro i et 0 sinon.

(a) Donner la loi de X_i.

(b) Lorsque l'on vide entièrement l'urne, combien de fois peut-on espérer que le numéro d'une boule ait coïncidé avec son rang dans le tirage ?

755. (CCP 2016)

Soit p variables aléatoires $X_1, \ldots, X_p$ admettant une variance.
On note $\Gamma = (\operatorname{cov}(X_i, X_j))_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ la matrice des covariances.

On chercher $c = (c_1, \ldots, c_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ non nul, tel que $\dfrac{1}{\|c\|^2} V(\sum\limits_{i=1}^{p} c_i X_i)$ soit maximal (pour avoir un échantillon le plus varié possible).

(a) Montrer que $\forall c \in (\mathbb{R}_+)^p, V(\sum\limits_{i=1}^{p} c_i X_i) = \sum\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} c_i c_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

(b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $\rho \in \mathbb{R}_+$, est diagonalisable et trouver une base de ses vecteurs propres.

(c) Montrer que Γ est diagonalisable.

(d) Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$ les valeurs propres de Γ énoncées dans l'ordre décroissant un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité. On note C le vecteur colonne $C = c^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_p \end{pmatrix}$. Montrer que $C^T \Gamma C = V(\sum\limits_{i=1}^{p} c_i X_i)$ et en déduire que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

(e) Montrer que $\dfrac{1}{\|c\|^2} V(\sum\limits_{i=1}^{p} c_i X_i) \leq \lambda_1$ (on pourra se placer dans une base de vecteurs propres de Γ).

(f) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si c est un vecteur propre associé à λ_1.

(g) Application : $p = 3$, $\rho \in [0,1]$, X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes de variances respectives V_1, V_2, V_3 telles que $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2, i \neq j, \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \rho$; on pose $Y_i = \dfrac{X_i}{\sqrt{V_i}}$ et $\Lambda = (\operatorname{cov}(Y_i, Y_j))_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$.

Trouver les valeurs propres de Λ et c tel que $\dfrac{1}{\|c\|^2} V(\sum\limits_{i=1}^{p} c_i X_i)$ soit maximal.

756. (EIVP 2016)

On donne n variables aléatoires mutuellement indépendantes X_k telles que $\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p_k)$.

Donner les lois de $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$, $W = \max_{k\in[\![1,n]\!]} X_k$ et $Z = \max_{k\in[\![1,n-1]\!]} (|X_{k+1} - X_k|)$.

757. (CCP 2016)

On dispose de deux urnes U_1, U_2, pouvant être vides, et de deux jetons. On choisit aléatoirement l'une des deux urnes et on en tire un jeton (si elle est vide, on passe à l'autre), puis on replace le jeton aléatoirement dans l'une des deux. On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de jetons dans U_1 au bout du n-ième tirage.

On note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \\ P(X_0=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, avec $p+q+r=1$, $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(a) Donner une base du noyau de A et en déduire une valeur propre.

(b) Montrer que A admet trois valeurs propres distinctes $a < b < c$ et qu'elle est diagonalisable. Trouver un vecteur propre associé à c.

(c) On admet que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à b ; donner une matrice P dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

(d) On pose $a_{i+1,j+1} = P_{X_n=j}(X_{n+1}=i)$ pour $(i,j) \in [\![0,2]\!]^2$ et A la matrice de coefficients $a_{i+1,j+1}$; montrer que $AU_n = U_{n+1}$ et en déduire la loi de X_n.

(e) Justifier que (U_n) admet une limite $\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$. Reconnaître la variable aléatoire X telle que $\forall k \in [\![0,2]\!], P(X=k) = l_k$.

758. (Mines Télécom 2016)

Soit N le nombre de visiteurs d'un parc par jour. N suit une loi de Poisson de paramètre 4000. Le parc possède 4 entrées et chaque visiteur se dirige vers une entrée indépendamment des autres visiteurs. Soit X la variable aléatoire du nombre de personnes empruntant l'entrée 1 chaque jour.

(a) Donner le nombre moyen de visiteurs empruntant les entrées du parc chaque jour.

(b) Donner la loi de probabilité de X.

759. (Mines Télécom 2016, Mines Télécom 2017, EIVP 2017)

X est une variable aléatoire sur un univers Ω vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
et $\exists k \in]0,1[, P(X=n) = kP(X \geq n)$.
Déterminer la loi de X.

760. (TPE-EIVP 2015)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la probabilité de tirer l'entier n comme étant égale à $\frac{1}{2^n}$.

(a) Montrer qu'on a ainsi bien défini une probabilité

(b) Soit $k \in N^*$. On note A_k l'évènement "L'entier n tiré est un multiple de k". Exprimer $P(A_k)$ en fonction de k.

(c) Calculer $P(A_2 \cup A_3)$

(d) On note B l'évènement " L'entier n tiré est un nombre premier ".
Montrer que $\frac{13}{32} < P(B) < \frac{209}{504}$.

761. (Mines Télécom 2015)
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment de X. On définit $Z = X + Y$.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

762. (Télécom SudParis 2015)
Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson. Comparer les probabilités des événements (X prend une valeur paire) et (X prend une valeur impaire).

763. (Mines Télécom 2015)
On définit des variables aléatoires discrètes Y_i, indépendantes, de même loi, et possédant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(a) Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que, pour tout $\alpha > 0$,
$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

(b) On tire avec remise une boule parmi 2 rouges et 3 noires. Quand a-t-on 95% au moins de chances d'avoir une proportion de boules rouges qui est comprise entre 0.35 et 0.45 ?

764. (CCP 2015)
Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p.
Trouver la nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{P(X > n)}{P(X = n)}$.

765. (CCP 2015)

(a) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ peut-elle être inversible ? A quelle(s) condition(s) sur x et y représente-t-elle un projecteur non nul ?

(b) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi binomiale de paramètres n et p.

i. Quelle est la probabilité que $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) \end{pmatrix}$ soit inversible ?

ii. Quelle est la probabilité que ce soit un projecteur non nul ?

766. (ENSEA 2015)
Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
Déterminer la loi de Y_i, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

767. (CCP 2015, CCP 2017)
Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ ; une variable aléatoire Y suit, sachant $(X = n)$, une loi binomiale de paramètres (n, p).
Déterminer la loi conjointe, puis celle de Y.

768. (CCP 2015)
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ; on tire successivement deux boules avec remise et on note X le plus grand des numéros qu'elles portent, Y le pus petit.
Donner les lois de (X, Y), de X et de Y.

769. (TPE-EIVP 2015)
Pour une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $P_n = P(X = n)$, $R_n = P(X > n)$, G sa fonction génératrice.
   (a) Trouver la relation entre la suite (R_n) et la série de terme général P_n.
   (b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum R_n t^n$ est au moins égal à 1.
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k t^k = \frac{1 - G(t)}{1 - t}$.

770. (Navale 2015) Une famille a n enfants ; les événements d'avoir une fille ou un garçon sont équiprobables.
   (a) On note A : la famille a au moins un enfant de chaque sexe et B : la famille a au plus une fille. Calculer les probabilités de A et B pour $n \geq 2$.
   (b) Montrer que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

771. (Mines Télécom 2015)
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge ; à chaque tirage, on note la couleur de la boule et on la remet accompagnée de deux autres boules de la même couleur.
   (a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?
   (b) Le résultat est-il le même si on ajoute trois boules au lieu de deux ?

772. (Mines Télécom 2015)
La probabilité d'obtenir pile avec une pièce truquée est de $0,3$
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir 3 piles en 10 lancers.
   (b) Calculer le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir une première fois pile.

773. (Mines Télécom 2015)
Un joueur lance une pièce truquée, la probabilité qu'il obtienne pile est $p \in]0, 1[$; il gagne dès qu'il obtient deux piles de plus que de faces, il perd dès qu'il a deux faces de plus que de piles.
   (a) Quelle est la probabilité que la partie dure plus de $2n$ coups ?
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

774. (Mines Télécom 2015)
Deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
   (a) Déterminer la loi de $X + Y$, en déduire son espérance et sa variance.
   (b) On suppose X et Y définies sur (Ω, A, P) ; Y suit une loi de poisson de paramètre μ, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et la loi conditionnelle de X, sachant que $P(Y = n)$ est une loi binomiale de paramètre (n, p). Déterminer la loi de X.

775. (Mines Télécom 2015)
On dispose d'une boite verte contenant deux jetons numérotés 0 et d'une boite rouge contenant deux jetons numérotés 1. On tire un jeton dans chaque boite et on les échange

de boite. On note X_n la variable aléatoire qui a pour valeur la somme des valeurs des jetons de la boite verte après n échanges.

Trouver la loi de X_n (on pourra introduire $V_n = \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \\ p(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et une matrice A telle que $V_n = A^n V_0$.)

776. (Mines-Télécom)
On désigne par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$.
$X_0 = 1$.
$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0,2$.
$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0,4$.
On pose $x_n = P(X_n = 1)$.

   (a) Déterminer x_1 et x_2.
   (b) Déterminer une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n.
   (c) Déterminer x_n en fonction de n.

777. (Mines-Télécom)
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi conjointe

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P(X = j, Y = k) = a\frac{j + k}{2^{j+k}}.$$

   (a) Trouver les lois marginales de X et de Y.
   (b) Déterminer a.
   (c) X et Y sont-elles indépendantes ?
   (d) Calculer $P(X = Y)$.

VI Autres

778. (Mines Télécom 2023) (Lison)
Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 2z = 1$.
Trouver les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ parallèles au plan d'équation $x + y + z = 0$.