Oraux de mathématiques – Récolte 2024

30 juin 2024

I CCINP

I.1 Exercices avec préparation

1. (Timothée, Anfel)
   Soit $h(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}e^{it}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \in \mathbb{R}$.
   On note $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)\mathrm{d}t$
   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x)$ est défini.
   (b) i. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1+u^2}\mathrm{d}u$.
   ii. Montrer que f est bornée et déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (c) i. Montrer que $|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leq \dfrac{1}{x^2+t^2}$ et $|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)| \leq \dfrac{6bt^2+2b^3}{(a^2+t^2)^3}$ (?), pour $0 < a \leq x \leq b$.
   ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $f''(x)$.
   (d) Soit $g(x,t) = \dfrac{1}{x^2+t^2}$.
   i. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.
   ii. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
   (e) ?

I.2 Exercices sans préparation

2. (Timothée)
   Soit $\varphi : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$.
   A quelle condition a-t-on
   (a) $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P)$?
   (b) $\deg(\varphi(P)) < \deg(P)$?
3. (Anfel)
   $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$
   (a) Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^3$.
   (b) Trouver le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-2)^2$.

II ENSEA Cergy

4. (Karim)

   Exercice 1

   Soit $\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & P+P' \end{array}$.

   (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

   (b) On note M_ϕ la matrice de ψ dans la base canonique

      i. Montrer qu'elle est inversible.

      ii. Pour $n=2$, M_ψ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

      iii. Pour $n \in \mathbb{N}$, M_ψ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

   Exercice 2

   On note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

   (a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\dfrac{1}{n\sqrt{n}})$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   (b) Déterminer la nature de $\sum v_n$. En déduire celle de $\sum u_n$.

   (c) Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Conclure.

5. (Louna)

   Exercice 1

   On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   (a) Dans $\mathbb{C}$, déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1+X^2}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

   (c) Calculer $f^{(n)}(0)$.

   Exercice 2

   Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$

   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)(X-3)$.

   (c) Déterminer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Exercice 3

   Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t$

   Dériver f.

III Mines Télécom

6. (Aliocha)

   Exercice 1

   On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ où $\gamma \in \mathbb{R}$.

   Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ et calculer sa somme.

   Exercice 2

   Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Trouver le rang, l'image et le noyau sans calcul.

   (b) Montrer que M est diagonalisable sans calcul.

7. (Mikaël)

   Exercice 1

   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+\frac{k}{p}}$.

   (b) On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos(\frac{2k\pi}{3})$.

   Montrer que $S_n = \dfrac{H_n - H_{3n}}{2}$

   (c) Limite de S_n ?

   Exercice 2

   On considère un flot de particules qu'on essaye de capter avec un détecteur. Chaque particule arrive sur le détecteur avec une probabilité $p \in]0,1[$.
   Le nombre N de particules qui arrivent suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On note S le nombre de particules captées par le détecteur.

   (a) Que vaut $P(S=s|N=n)$? En déduire $P(S=s)$.

   (b) Sans calcul, quelle est la loi de $N-S$?

   (c) N et $N-S$ sont-elles indépendantes ?