

Programme de colles – Semaine 5 – du 14/10 au 18/10

Révisions d'algèbre linéaire de PCSI

Chaque colle débutera par l'un des items suivants :

- Démonstration de : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, *suivi de* deux matrices semblables ont la même trace.
- Démonstration de : Si u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .
- Écriture de la matrice dans la base canonique de 3 endomorphismes choisis par le colleur :
 - un endomorphisme de \mathbb{R}^n (ou une application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n)
 - un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$
 - un endomorphisme de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

les valeurs de m , n , p et q restant à la discrétion du colleur

Toute démonstration non sue ou méconnaissance des méthodes pour les matrices (y compris une confusion entre lignes et colonnes) entraînera une note < 10 .

Révisions d'algèbre linéaire de PCSI

- Calcul matriciel
- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires
- Représentation matricielle des applications linéaires
- Endomorphismes remarquables (homothéties, projections, symétries)
- Déterminants

Compléments d'algèbre linéaire

- Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces.
 - Somme directe. Caractérisation des sommes directes par l'unicité de la décomposition du vecteur nul
 - En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base
 - $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$, avec égalité ssi la somme est directe

- Matrices par blocs et sous-espaces stables
 - Matrices définies par blocs, opérations
 - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
 - Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
 - Si u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .
Traduction matricielle de la stabilité d'un sev par un endomorphisme.
Interprétation en termes d'endomorphisme d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs
- Matrices semblables et trace
 - Matrices semblables. Caractérisation : deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme. Invariance du déterminant par similitude
 - Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 - Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.
- Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées
 - Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Le noyau de $P(u)$ est stable par u .
 - Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
 - Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.