

Programme de colles – Semaine 6 – du 04/11 au 08/11

Chaque colle débutera par l'un des items suivants :

- Démonstration de : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, *suivi de* deux matrices semblables ont la même trace.
- Démonstration de : Si u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .
- Déterminant de Vandermonde (énoncé et démonstration en taille n)

Toute démonstration non sue ou méconnaissance des méthodes pour les matrices (y compris une confusion entre lignes et colonnes) entraînera une note < 10 .

Compléments d'algèbre linéaire

- Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces.
 - Somme directe. Caractérisation des sommes directes par l'unicité de la décomposition du vecteur nul
 - En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base
 - $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$, avec égalité ssi la somme est directe
- Matrices par blocs et sous-espaces stables
 - Matrices définies par blocs, opérations
 - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
 - Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
 - Si u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .
Traduction matricielle de la stabilité d'un sev par un endomorphisme. Interprétation en termes d'endomorphisme d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs
- Matrices semblables et trace
 - Matrices semblables. Caractérisation : deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme. Invariance du déterminant par similitude
 - Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 - Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.
- Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées
 - Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Le noyau de $P(u)$ est stable par u .

- Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
- Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.
- Interpolation de Lagrange
 - Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de \mathbb{K} . Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points est le polynôme constant égal à 1.
 - Déterminant de Vandermonde.

Révisions de PCSI : Suites numériques

Monotonie d'une suite, cas des suites récurrentes d'ordre 1. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. Limites, opérations sur les limites, stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'existence d'une limite : encadrement, majoration, minoration, th. de la limite monotone, th. des suites adjacentes. Suites extraites. Suites complexes.

Séries numériques

Révisions de PCSI

- Séries. Sommes partielles, convergence, divergence. En cas de convergence : somme et restes.
- Linéarité de la somme.
- Si $\sum u_n$ converge, $u_n \rightarrow 0$. Divergence grossière.
- Séries télescopiques (lien suite-série). Séries géométriques (sommes partielles, CNS de convergence, somme en cas de convergence). Séries de Riemann (CNS de convergence).
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : par \leq et par \sim .
- Méthode des rectangles pour encadrer les sommes partielles de $\sum f(n)$ pour f continue et monotone.
- Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.
- Théorème de comparaison par O (ou o) pour les séries absolument convergentes.

Compléments

- Règle de d'Alembert
- Formule de Stirling
- Théorème spécial des séries alternées. Majoration et signe du reste.