

## Programme de colles – Semaine 11 – du 09/12 au 13/12

**Réduction des endomorphismes et des matrices****Elements propres**

- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque. Equation aux éléments propres.
- Caractérisation :  $x$  est un vecteur propre de  $f$  ssi  $\text{Vect}(x)$  est stable par  $f$
- Si  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .
- Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des vp distinctes est libre.
- $u(x) = \lambda x \Rightarrow P(u)(x) = P(\lambda)x$ . Si  $P(u) = 0$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .
- Polynôme caractéristique  $\chi_f$  d'un endomorphisme en dimension finie. Coefficients de degré 0 et  $n - 1$ . Th : Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
- Multiplicité d'une valeur propre. Th :  $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda$ .
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
- Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.
- Théorème de Cayley-Hamilton.
- Extension des définitions/résultats aux matrices carrées.

**Endomorphismes/Matrices diagonalisables**

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.
- Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
- Caractérisation 1 :  $f$  est diagonalisable ssi la somme de ses sous-espaces propres est égale à  $E$
- Caractérisation 2 :  $f$  est diagonalisable ssi la somme des dimension de ses sous-espaces propres est égale à  $\dim E$ .
- Caractérisation 3 :  $f$  est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.
- Condition suffisante de diagonalisabilité : Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable (ou polynôme caractéristique scindé à racines simples.)
- Extension des définitions/résultats aux matrices.

## Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

- $f$  est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.
- $f$  est diagonalisable ssi il admet  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$  pour polynôme annulateur.

## Endomorphismes/Matrices trigonalisables

- Définition des endomorphismes et matrices trigonalisables.
- Caractérisation : Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. (Admis).
- Corollaire : tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (ou toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ) est trigonalisable.
- *La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.*

## Suites de fonctions

### Modes de convergence d'une suite de fonctions

- Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

### Régularité de la limite d'une suite de fonctions

- Continuité de la limite d'une suite de fonctions.
- Intersion limite-intégrale (sur un segment)
- Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions
- Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

## Séries de fonctions

### Modes de convergence d'une série de fonctions

- Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.
- La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

### Régularité de la somme d'une série de fonctions

- Continuité de la somme.
- Théorème de la double limite