

Programme de colles – Semaine 14 – du 20/01 au 24/01

Séries entières**Rayon de convergence**

- Lemme d'Abel
- Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.
- Convergence absolue dans le disque (ou intervalle) ouvert de convergence.
- $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$
- Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_b \leq R_a$. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_b = R_a$.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- Utilisation de la règle de d'Alembert.
- Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Régularité de la somme

- Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Caractère \mathcal{C}^∞ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
- Relation $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction d'une variable réelle

- Fonction développable en série entière.
- Série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞
- Unicité du développement en série entière.
- Développements des fonctions usuelles : exp, cos, sin, ch, sh, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Utilisation d'une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

Séries entières d'une variable complexe

- Continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. (Admis)
- Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.

- Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .

Variables aléatoires discrètes

Généralités

- Définition d'une variable aléatoire discrète.
- Loi P_X d'une v.a. discrète.
- Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$, $f(X) \sim f(Y)$.
- Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A .
- Couple de variables aléatoires indépendantes. Extension au cas de n v.a. Suites de v.a. indépendantes, suites i.i.d.
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Lemme des coalitions.

Espérance et variance

- Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$.
- Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X .
- Variable centrée
- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.
- Formule du transfert.
- Linéarité, positivité et croissance de l'espérance.
- Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.
- Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$, alors $(X = 0)$ est presque sûr.
- Si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (admis). (La réciproque est fausse). Extension à n variables.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$. Cas d'égalité.
- Définition de la variance. Ecart type. Formule de König-Huyghens.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- Variable réduite. Si $\sigma(X) > 0$, $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Note aux colleurs : Pour les variables aléatoires, pas encore de covariance, de fonctions génératrices. Les lois géométrique et de Poisson n'ont pas encore été étudiées, elles peuvent être introduites en exercices.