Programme de colles – Semaine 15 – du 27/01 au 31/01

Variables aléatoires discrètes

Généralités

— Définition d'une variable aléatoire discrète.

— Loi P_X d'une v.a. discrète.

— Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$, $f(X) \sim f(Y)$.

— Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.

— Couple de variables aléatoires indépendantes. Extension au cas de n v.a. Suites de v.a. indépendantes, suites i.i.d.

— Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Lemme des coalitions.

Espérance et variance

— Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$.

— Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.

— Variable centrée

— Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

— Formule du transfert.

— Linéarité, positivité et croissance de l'espérance.

— Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.

— Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$, alors $(X = 0)$ est presque sûr.

— Si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (admis). (La réciproque est fausse). Extension à n variables.

— Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$. Cas d'égalité.

— Définition de la variance. Ecart type. Formule de König-Huyghens.

— $V(aX + b) = a^2V(X)$.

— Variable réduite. Si $\sigma(X) > 0$, $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

— Covariance de deux v.a. Relation $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

— Si X et Y sont indépendantes, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. (La réciproque est fausse.)

— $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$.
Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. (La réciproque est fausse.) Extension à n variables.

Fonctions génératrices

- Définition de la fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de X est entièrement caractérisée par G_X. Le rayon de convergence de G_X est ≥ 1. G_X CVN sur $[-1,1]$ donc est continue.
- Lien série génératrice-espérance. Lien série génératrice-variance.
- Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Lois usuelles

Les fonctions génératrices des variables suivant les lois usuelles doivent savoir être calculées rapidement par les étudiants.

- Loi uniforme (loi+espérance dans le cas $\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$)
- Loi de Bernoulli (loi+espérance+variance)
- Loi binomiale (loi+espérance+variance)
- Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Espérance, variance. Interprétation comme rang du 1er succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Relation $P(X > k) = (1-p)^k$.
- Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Espérance, variance. Interprétation en termes d'événements rares.

Inégalités probabilistes

- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres

$\boxed{\textbf{Révisions de PCSI : Espaces préhilbertiens réels}}$

- Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Exemples de référence : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (expression X^TY), $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
- Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Identités remarquables et formules de polarisation.
- Vecteurs orthogonaux. Orthogonal d'une partie. $A^\perp$ est un sev. Familles orthogonales, orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.