Programme de colles – Semaine 16 – du 03/02 au 07/02

Variables aléatoires discrètes

Généralités

- Définition d'une variable aléatoire discrète.
- Loi P_X d'une v.a. discrète.
- Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$, $f(X) \sim f(Y)$.
- Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.
- Couple de variables aléatoires indépendantes. Extension au cas de n v.a. Suites de v.a. indépendantes, suites i.i.d.
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Lemme des coalitions.

Espérance et variance

- Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$.
- Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.
- Variable centrée
- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.
- Formule du transfert.
- Linéarité, positivité et croissance de l'espérance.
- Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.
- Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$, alors $(X = 0)$ est presque sûr.
- Si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (admis). (La réciproque est fausse). Extension à n variables.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$. Cas d'égalité.
- Définition de la variance. Ecart type. Formule de König-Huyghens.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Variable réduite. Si $\sigma(X) > 0$, $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
- Covariance de deux v.a. Relation $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. (La réciproque est fausse.)
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$.
  Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. (La réciproque est fausse.) Extension à n variables.

Fonctions génératrices

- Définition de la fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de X est entièrement caractérisée par G_X. Le rayon de convergence de G_X est ≥ 1. G_X CVN sur $[-1,1]$ donc est continue.
- Lien série génératrice-espérance. Lien série génératrice-variance.
- Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Lois usuelles

Les fonctions génératrices des variables suivant les lois usuelles doivent savoir être calculées rapidement par les étudiants.

- Loi uniforme (loi+espérance dans le cas $\mathcal{U}(\llbracket a,b\rrbracket)$)
- Loi de Bernoulli (loi+espérance+variance)
- Loi binomiale (loi+espérance+variance)
- Loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Espérance, variance. Interprétation comme rang du 1er succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Relation $P(X>k)=(1-p)^k$.
- Loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. Espérance, variance. Interprétation en termes d'événements rares.

Inégalités probabilistes

- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres

Révisions de PCSI : Espaces préhilbertiens réels

- Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Exemples de référence : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (expression X^TY), $(f|g)=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
- Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Identités remarquables et formules de polarisation.
- Vecteurs orthogonaux. Orthogonal d'une partie. $A^\perp$ est un sev. Familles orthogonales, orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Bases orthonormées d'un espace euclidien. Existence. Th de la bon incomplète. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- Projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal dans une bon de F.

  $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui minimise la distance de x à un vecteur de F. Distance de x à F.
- Supplémentaire orthogonal d'un sev F de dimension finie. $\dim F^\perp$ si E est euclidien. Vecteur normal à un hyperplan.

Endomorphismes des espaces euclidiens

- Isométrie vectorielle Définition par la conservation de la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire et par l'image d'une base orthonormée. Exemple des symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Groupe orthogonal.
- Matrice orthogonale. Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée. Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Groupe orthogonal. Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.
- Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.
- Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

Note aux colleurs : Le théorème spectral sera au programme la semaine suivante.