Programme de colles – Semaine 17 – du 10/02 au 14/02

Endomorphismes des espaces euclidiens

- Isométrie vectorielle Définition par la conservation de la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire et par l'image d'une base orthonormée. Exemple des symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Groupe orthogonal.
- Matrice orthogonale. Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée. Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Groupe orthogonal. Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.
- Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.
- Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Théorème spectral (admis). Forme matricielle du théorème spectral. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale. Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale.

Espaces vectoriels normés

- Normes
  - Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Distance associée à une norme.
  - Normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Norme $\| \|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  - Boule ouverte, boule fermée, sphère.
  - Partie convexe. Convexité des boules.
  - Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.