Programme de colles – Semaine 19 – du 17/03 au 21/03

Espaces vectoriels normés

- Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
  - Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.
- Comparaison des normes
  - Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
  - Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
- Topologie d'un espace vectoriel normé
  - Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.
  - Fermé d'un espace normé. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.
  - Point adhérent à une partie, adhérence. Caractérisation séquentielle.
  - Partie dense.
  - Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
- Limite et continuité en un point
  - Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle.
  - Opérations algébriques sur les limites, composition.
  - Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
- Continuité sur une partie
  - Opérations algébriques, composition.
  - Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
  - Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
  - Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.
- Espaces vectoriels normés de dimension finie
  - Équivalence des normes en dimension finie (admis)
  - La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

— Théorème des bornes atteintes (admis).

— Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Calcul différentiel

— Dérivabilité des fonctions vectorielles

  — Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle. Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.

  — Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

  Dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1,\dots,f_p$ à valeurs vectorielles. Application au produit scalaire et au déterminant. Dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles.

  — Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.

— Fonctions de plusieurs variables

  — Dérivée en un point selon un vecteur. Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue. Différentielle de f en a.

  — Règle de la chaîne. Dérivée de $t\mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de $(u_1,\dots,u_n)\mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)\big)$. Cas particulier des coordonnées polaires. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

  — Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Relation $\mathrm{d}f(a)\cdot h=\langle\nabla f(a),h\rangle$.

  — Dérivées partielles d'ordre 2. Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz (admis). Matrice hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admis).