PC Balzac 2025-26 **Mathématiques**

Programme de colles – Semaine 3 – du 29/09 au 03/10

Chaque colle débutera par la démonstration de l'intégrabilité d'une des fonctions de référence : ln en 0, $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en 0, $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$ ou $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

Intégration

Intégrales généralisées

- Définition de l'intégrale d'une fonction c.p.m. sur un intervalle de type $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.
- Intégrales faussement impropres
- Propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Intégration par parties sur un intervalle quelconque
- Changement de variable

Intégrabilité

- Intégrale absolument convergente. Fonction intégrable.
- La convergence absolue implique la convergence
- Inégalité triangulaire
- Espace vectoriel $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$
- Si f continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f est identiquement nulle sur I
- Théorèmes de comparaison pour les fonctions cpm et intégrables ($|f| \leq |g|$, $f = O(g)$, $f \sim g$)
- Fonctions intégrables de référence : ln en 0, $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$ et 0^+, $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.
  Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ *en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction* $x \mapsto f(x)$ *est intégrable en* a^+ *(resp. en* b^-*) si* $t \mapsto f(a+t)$ *(resp.* $t \mapsto f(b-t)$*) l'est en* 0^+*.*

Révisions d'algèbre linéaire de PCSI

- Calcul matriciel
- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires

Note aux colleurs : Pas encore de représentation matricielle des applications linéaires, de projections/symétries ou de déterminants.