

## Programme de colles – Semaine 5 – du 13/10 au 17/10

**Révisions d'algèbre linéaire de PCSI**

- Calcul matriciel
- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires
- Représentation matricielle des applications linéaires
- Endomorphismes remarquables (homothéties, projections, symétries)
- Déterminants

**Compléments d'algèbre linéaire**

- Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces.
  - Somme directe. Caractérisation des sommes directes par l'unicité de la décomposition du vecteur nul
  - En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base
  - $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ , avec égalité ssi la somme est directe
- Matrices par blocs et sous-espaces stables
  - Matrices définies par blocs, opérations
  - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
  - Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
  - Si  $u$  et  $v$  commutent,  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  sont stables par  $v$ .  
Traduction matricielle de la stabilité d'un sev par un endomorphisme. Interprétation en termes d'endomorphisme d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs
- Matrices semblables et trace
  - Matrices semblables. Caractérisation : deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme. Invariance du déterminant par similitude
  - Trace d'une matrice carrée. Linéarité.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
  - Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.
- Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées
  - Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Relation  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ . Deux polynômes de l'endomorphisme  $u$  commutent. Le noyau de  $P(u)$  est stable par  $u$ .
  - Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
  - Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.