Chapitre 4 – Espaces probabilisés – Exemples

Exemple A

On effectue une suite suite infinie de lancers d'une pièce. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i : « On obtient un *Pile* au i-ème lancer »

1. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :
   (a) $E_1 = P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3$
   (b) $E_2 = P_5 \cup P_6$
   (c) $E_3 = \bigcap_{i=4}^{+\infty} P_i$
   (d) $E_4 = (\bigcap_{i=1}^{3} \overline{P_i}) \cap (\bigcap_{i=4}^{+\infty} P_i)$
   (e) $E_5 = \bigcup_{i>3} P_i$
2. Écrire à l'aide des P_i les événements
   (a) E_6 : « on obtient un Pile lors de chacun des deux premiers lancers »
   (b) E_7 : « on obtient un Pile au moins une fois au cours des 4 premiers lancers »
   (c) B_n : « on n'obtient que des Pile à partir du n-ème lancer »
   (d) B : « on n'obtient que des Pile à partir d'un certain lancer »
3. Quelle relation d'inclusion y a-t-il entre B_n et B_{n+1} ?

Exemple B

Montrer que P telle que $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Soit $A = \{n \in \mathbb{N} | 5 \leq n \leq 10\}$ et I l'ensemble des nombres impairs. Déterminer $P(A)$ et $P(I)$.

Exemple C

On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On note A_n l'événement : « le 6 est sorti au moins une fois avant le n-ième tirage ».

Donner une relation d'inclusion entre A_n et A_{n+1}.

Quelle est la probabilité de l'événement B : « le 6 sort au moins une fois » ?

Exemple D

On considère une suite illimitée de lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

Montrer qu'il est presque impossible de n'obtenir que des Pile.

Exemple E

Une urne contient 4 boules bleues et 3 boules rouges.

On effectue trois tirages successifs sans remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule rouge puis 2 boules bleues ?

Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule rouge et 2 boules bleues ?

Exemple F

Une compagnie d'assurance classe ses clients en 2 catégories : les clients enclins aux accidents (20% des clients) et les clients peu enclins aux accidents.

La probabilité d'avoir au moins un accident par an pour la première catégorie est de 0,5, pour la seconde catégorie elle est de 0,1.

Quel est la probabilité qu'un client choisi au hasard ait au moins un accident par an ?

Exemple G

Dans une série médiévale fantastique bien connue, les décès des personnages sont nombreux.

Un personnage meurt dans le prologue (épisode 0).

Si un personnage meurt à l'épisode n, alors un personnage meurt à l'épisode $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Si aucun personnage ne meurt à l'épisode n, alors un personnage meurt à l'épisode $n+1$ avec probabilité $2/3$.

Soit A_n : « un personnage meurt à l'épisode n » et $p_n = P(A_n)$.

Déterminer p_n en fonction de n.

Exemple H

On considère une urne contenant 3 pièces. La pièce A est équilibrée, la pièce B tombe sur *Face* avec probalité $2/3$, et la pièce C tombe sur *Face* avec probalité $3/4$.

On tire d'abord au hasard un pièce dans l'urne puis on lance la pièce.

Quelle est la probabilité d'avoir tiré B sachant qu'on a obtenu *Face* ?

Exemple I

On effectue deux lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

On considère les événements A : le premier lancer donne Pile, B : le second lancer donne face, C : les 2 lancers donnent le même résultat.

Montrer que les événements sont indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.

Exemple J

On considère un jeu avec deux dés à 6 faces. Le dé A est équilibré, le dé B est pipé : il tombe sur 6 avec probabilité $1/3$.

Principe du jeu : Le joueur A lance le dé A et le joueur B lance le dé B. Les joueurs jouent en alternance en commençant par le joueur A. On suppose tous les lancers indépendants.

On s'arrête dès qu'un 6 est obtenu. Le premier joueur qui obtient 6 gagne.

Déterminer la probabilité de V_A : « A gagne », V_B : « B gagne » et I : « le jeu ne s'arrête jamais ».
