Programme de colles – Semaine 9 – du 24/11 au 28/11

Espaces probabilisés

- Ensemble dénombrable. Ensemble au plus dénombrable. Description en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$. Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Famille sommable d'éléments de $[0, +\infty]$ ou de $\mathbb{C}$. Croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.
- Univers. Tribu. Définition, stabilité par intersection dénombrable. Espace probabilisable. Evénements.
- Probabilité, σ-additivité. Espace probabilisé.
- Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.
- Evénement presque sûr, événement négligeable.
- Continuité croissante, continuité décroissante. Corollaires : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$, pour une suite quelconque d'événements.
- Sous-additivité
- Probabilités conditionnelles. P_B définit une probabilité.
- Formule des probabilités composées
- Système complet d'événements, système quasi-complet d'événements.
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes
- Indépendance de deux événements. Caractérisation par les probabilités conditionnelles.
- Indépendance d'une famille finie d'événements. (L'indépendance deux à deux n'entraîne pas toujours l'indépendance mutuelle)
- Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Réduction des endomorphismes et des matrices

Elements propres

- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque. Equation aux éléments propres.
- Caractérisation : x est un vecteur propre de f ssi $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f
- Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
- Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.

- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des vp distinctes est libre.
- $u(x) = \lambda x \Rightarrow P(u)(x) = P(\lambda)x$. Si $P(u) = 0$, toute valeur propre de u est racine de P.
- Polynôme caractéristique χ_f d'un endomorphisme en dimension finie. Coefficients de degré 0 et $n-1$. Th : Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
- Multiplicité d'une valeur propre. Th : $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda$.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
- Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.
- Théorème de Cayley-Hamilton.
- Extension des définitions/résultats aux matrices carrées.

Endomorphismes/Matrices diagonalisables

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.
- Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
- Caractérisation 1 : f est diagonalisable ssi la somme de ses sous-espaces propres est égale à E
- Caractérisation 2 : f est diagonalisable ssi la somme des dimension de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.
- Caractérisation 3 : f est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.
- Condition suffisante de diagonalisablité : Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable (ou polynôme caractéristique scindé à racines simples.)
- Extension des définitions/résultats aux matrices.

Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

— f est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

— Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.

— f est diagonalisable ssi il admet $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

Endomorphismes/Matrices trigonalisables

— Définition des endomorphismes et matrices trigonalisables.

— Caractérisation : Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. (Admis).

— Corollaire : tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (ou toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est trigonalisable.

— *La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.*

Note aux colleurs :

— Les notions de sommabilité et de dénombrabilité ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste. La notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition.