Chapitre 8 – Variables aléatoires discrètes

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ désigne un espace probabilisé.

I Généralités sur les variables aléatoires discrètes

I.1 Définition

Définition.

Soit E un ensemble.
Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to E$ telle que

1. $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ de $\{x\}$, notée $(X = x)$ ou $\{X \in x\}$, est un événement (*i.e.* appartient à $\mathcal{T}$)

Remarque I.1. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.

Exemple I.1 (Lancer de deux dés.)**.** $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
On note X la somme des deux dés.
Décrire l'événement $(X = 4)$.

Remarque I.2. Dans le cours de PCSI, une variable aléatoire est simplement une application de Ω fini dans un autre ensemble. Quand Ω est fini, on prend toujours $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X(\Omega)$ est nécessairement fini, donc la définition de PCSI est cohérente avec la nouvelle définition.

Remarque I.3. Pour $A \subset X(\Omega)$. L'ensemble $X^{-1}(A)$ est un événement, noté $(X \in A)$.
Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on note $(X \geq k)$ l'événement $(X \in [k, +\infty[)$

Exemple I.2 (Variable aléatoire discrète non finie : temps d'attente.)**.** On lance une pièce une infinité de fois. X représente le numéro du lancer où apparaît le premier Pile.
On note F_i (respectivement P_i) l'événement « on obtient Face au i-ème lancer » (resp. Pile)

1. Que vaut $X(\Omega)$?
2. Décrire $(X = 5)$, $(X \geq 4)$ et (≤ 3) à l'aide des événements F_i/P_i.

On note Y le rang d'apparition du second pile.

1. Que vaut $Y(\Omega)$?
2. Décrire $(Y = 3)$ à l'aide des événements F_i/P_i.

I.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On appelle loi de la X, notée P_X, la donnée des $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Exemple I.3. On considère une suite infinie de lancers indépendants de pièce équilibrée. On note X le rang d'obtention du 1er pile.

Déterminer la loi de X.

Remarque I.4. — On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi.

— Si f est une application définie sur $X(\Omega)$, $f(X)$ est une variable aléatoire (par exemple X^2, $\dfrac{1}{X}\ldots$).

— Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Proposition 1.

Soit X une variable aléatoire discrète.
La famille $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements

Corollaire 2.

$\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$

Remarque I.5 (Rappels de PCSI : lois usuelles).

1. Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, où $a, b \in \mathbb{Z}, a \leq b$.

   — $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$,

   — $\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \dfrac{1}{b - a + 1}$.

   On note $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$.
   (Plus généralement, on peut définir une loi uniforme sur un ensemble fini E, avec $X(\Omega) = E$ et $\forall x \in E, P(X = x) = \dfrac{1}{\mathrm{card}(E)}$.)
   Exemple : X : résultat du lancer d'un dé équilibré. $X \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$

2. Loi de Bernoulli de paramètre p, où $p \in [0, 1]$.

   — $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

   — $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$.

   On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.
   Exemples :

   — Lancer de pièce, équilibrée ou non.

   — Plus généralement, utilisée pour modéliser des expériences aléatoires à 2 issues : succès (1) et échec (0)

   — Variable indicatrice d'un événement : $\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 \text{ si } A \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   $\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$

3. Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

   — $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

— $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

X modélise le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment n fois une expérience de probabilité de réussite égale à p.

Exemple I.4. On considère une pièce de monnaie déséquilibrée, qui tombe sur pile avec probabilité p.

1. On considère X le temps d'attente du 1er pile. Déterminer la loi de X.
2. Même question avec Y, le temps d'attente du 2nd pile.
3. Vérifier que $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) = 1$.

Remarque I.6. On suppose $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

— Si on connaît la loi de X, comment calculer $P(X \leq k)$ et $P(X \geq k)$.

— Si on connaît les valeurs de $P(X \leq k)$, comment déterminer la loi de X ? Même question en connaissant les $P(X > k)$.

I.3 Couples de variables aléatoires

Définition.

Soit $X : \Omega \to E, Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

On dit que la variable aléatoire discrète $\begin{array}{rcl} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ est un couple de variables aléatoires.

On la note (X, Y).

La loi de (X, Y) est appelée la loi conjointe de X et Y.

Les lois de X et de Y sont appelées les lois marginales du couple (X, Y).

Exemple I.5. On effectue 2 tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules blanches et 4 noires.

$X = 1$ si la première boule est blanche, 0 sinon, idem pour Y et le 2ème tirage.

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois marginales.

Remarque I.7. — Les lois marginales sont entièrement déterminées par la loi conjointe. Pour obtenir la loi de X, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = j)_{j \in Y(\Omega)}$: $P(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j))$.

— Important : Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe en général.

Exemple I.6. On reprend l'exemple des temps d'attente du premier pile (X) et du second pile (Y) avec une probabilité d'obtenir Pile égale à p

Déterminer la loi conjointe et retrouver les lois marginales.

Définition.

Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $B \in \mathcal{T}$ tel que $P(B) > 0$.

La loi conditionnelle de Y sachant B est la loi déterminée par la donnée, pour tout $y \in Y(\Omega)$, de $P_B(Y = y) = P(Y = y | B)$.

Exemple I.7. Souvent, on calcule la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

Reprendre l'exemple précédent. Déterminer la loi de Y sachant $(X = i)$ et la loi de X sachant $(Y = j)$.

I.4 Indépendance

Définition.

Soit X, Y deux va discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On dit que X et Y sont indépendantes lorsque, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Remarque I.8. De façon équivalente,

$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

C'est la relation que l'on utilise en général pour justifier l'équivalence.

Remarque I.9. Reprendre l'exemple des 2 tirages sans remise dans l'urne, et l'exemple des temps d'attente des 2 premiers Pile.

Pour chacun des deux exemples, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Remarque I.10. Dans le cas des v.a. indépendantes, la connaissance des lois marginales suffit pour connaître la loi conjointe. Il suffit de faire le produit.

Remarque I.11. On peut étendre la définition à n variables aléatoires ($X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes lorsque tous les événements $(X_1 \in A_1)$, ...,$(X_n \in A_n)$ sont indépendants).

Définition.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ sont indépendantes.
On dit que (X_n) est une suite i.i.d. lorsque c'est une suite de variables indépendantes telle que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $X_i \sim X_j$.

Remarque I.12. i.i.d. : indépendantes et identiquement distribuées

Exemple I.8. Un jeu de Pile ou Face infini est modélisé par une suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

Proposition 3.

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $f : X(\Omega) \to E$, $g : Y(\Omega) \to F$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

Exemple I.9. X^2 et $3Y - 1$

Plus généralement,

Proposition 4 (Lemme des coalitions).

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Remarque I.13. Le résultat s'applique avec plus de coalitions (plus de fonctions).

Proposition 5 (Rappel de PCSI).

Soit $p \in [0,1]$ Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi $\mathcal{B}(p)$.
Alors $X = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$

Exemple I.10. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Y$, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Calculer $P(X = Y)$.

II Espérance et variance

II.1 Espérance – Définition

Définition (Espérance d'une variable aléatoire discrète positive).

Si $X(\Omega) \subset [0, +\infty]$. On appelle espérance de X :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Remarque II.1. Par convention, $xP(X = x) = 0$ si $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.

Définition (Variable aléatoire discrète d'espérance finie).

Si X est une variable aléatoire à valeurs réelles ou complexes, on dit que X est d'espérance finie lorsque la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas l'espérance de X est le scalaire $E(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Remarque II.2.
— Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on peut écrire $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n distincts. X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ converge absolument.
— Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (comme dans la plupart des cas que l'on étudiera), $E(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)$

Remarque II.3. 1. Si X prend un nombre fini de valeurs, l'espérance est nécessairement finie.

2. Si $X(\Omega)$ est bornée, l'espérance est nécessairement finie.

Proposition 6 (Rappels de PCSI – Espérances des lois usuelles finies)**.**

— Si $X \sim \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

— Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $E(X) = p$.

— Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $E(X) = np$.

Exemple II.1. 1. $E(\mathbf{1}_A) = P(A)$ (car $\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$).

2. Espérance du temps d'attente du 1er pile (pièce équlibrée).
3. Soit une v.a. sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Vérifier qu'on définit bien une loi puis montrer que l'espérance de X n'est pas finie.

Proposition 7.

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors
$E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Exemple II.2. Temps d'attente du 1er Pile

Définition (Variable aléatoire centrée)**.**

On dit qu'une variable aléatoire X est centrée lorsque X est d'espérance finie et $E(X) = 0$.

II.2 Espérance – Propriétés

Théorème 8 (Théorème du transfert)**.**

Si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles ou complexes définie sur $X(\Omega)$, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable
Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$$

Exemple II.3. Soit X une va discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \dfrac{a}{n!}$

1. Déterminer a pour qu'on définisse bien une loi.
2. Déterminer $E(X)$.

3. Déterminer $E(1/(1+X))$.

Proposition 9 (Linéarité de l'espérance)**.**

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes d'espérance finie, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors $X + \lambda Y$ est d'espérance finie, et $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$

Exemple II.4. Espérance de la somme des résultats 2 dés équilibrés (lancers indépendants ou non).

Proposition 10 (Positivité de l'espérance)**.**

Soit X une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie telle que $\forall x \in X(\Omega), x \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

Proposition 11 (Croissance de l'espérance)**.**

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérance finie telles que $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition 12.

Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.

Proposition 13.

Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$, alors $(X = 0)$ est presque sûr.

Proposition 14.

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes d'espérance finie **indépendantes**, alors XY est d'espérance finie et $E(XY) = E(X)E(Y)$

Remarque II.4. Le résultat s'étend à n variables aléatoires.

Exemple II.5. Espérance du produit de 2 lancers de dés à 6 faces indépendants.

Remarque II.5. La réciproque est fausse. Par exemple $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$. On vérifie $E(X)E(Y) = E(XY)$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.

II.3 Variance

Proposition 15.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Théorème 16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie.
Alors XY est d'espérance finie et
$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

Remarque II.6. Cas d'égalité : $(E(XY))^2 = E(X^2)E(Y^2)$ si et seulement si X et Y sont presque sûrement colinéaires.

Définition (Variance)**.**

Soit X une va réelle telle que X^2 est d'espérance finie.
On appelle variance de X le réel $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
On appelle écart type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 17 (Formule de König-Huygens)**.**

Mêmes hypothèses.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Remarque II.7. En pratique, on utilise cette formule, plutôt que la définition.

Proposition 18 (Rappels de PCSI – Variances des lois usuelles finies)**.**

— Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $V(X) = p(1-p)$.
— Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $V(X) = np(1-p)$.

Exemple II.6.

Temps d'attente du 1er Pile. Cas équilibré

Jeu avec questions de plus en plus dures. Probabilité de bien répondre à la n-ième question : $1/n$. On s'arrête si on répond mal. X numéro de la dernière question posée. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

Proposition 19.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, X une va réelle telle que X^2 est d'espérance finie.
Alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Définition.

On dit qu'une variable est réduite lorsque X^2 est d'espérance finie et $V(X) = 1$ (ou $\sigma(X) = 1$)

Proposition 20.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

II.4 Covariance

Définition.

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie.
On appelle covariance de X et de Y le réel $\operatorname{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))$

Exemple II.7. — $\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$

— $\operatorname{cov}(X, -X) = -V(X)$

— $\operatorname{cov}(X, A) = 0$

— $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab \operatorname{cov}(XY)$

— $\operatorname{cov}(X + Y, Z) = \operatorname{cov}(X, Z) + \operatorname{cov}(Y, Z)$

Proposition 21.

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie.
Alors $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Remarque II.8. C'est cette formule qu'on utilise en pratique dans les calculs.

Exemple II.8. On tire deux boules simultanément dans une urne contenant 3 boules numérotées 1, 2 et 3.. X est le minimum des numéros tirés, Y est le maximum.

Corollaire 22.

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\operatorname{cov}(XY) = 0$.

Remarque II.9. La réciproque est fausse en général. *(Les variables sont dites décorrélées mais pas indépendantes)*

cf contre-exemple de $E(XY) = E(X)E(Y)$

Proposition 23 (Variance d'une somme)**.**

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie. Alors $X + Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$

Remarque II.10. $V(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum\limits_{i \neq j} \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum\limits_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$
$= \sum\limits_{i,j \in [\![1,n]\!]} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

Corollaire 24.

Si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Remarque II.11. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, $V(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} V(X_i)$.

Remarque II.12. On retrouve de cette manière la variance d'une variable binomiale à partir de celle d'une variable de Bernoulli.