

## Programme de colles – Semaine 14 – du 19/01 au 23/01

**Séries entières****Rayon de convergence**

- Lemme d'Abel
- Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.
- Convergence absolue dans le disque (ou intervalle) ouvert de convergence.
- $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$
- Si  $a_n = O(b_n)$ , alors  $R_b \leq R_a$ . Si  $a_n \sim b_n$ , alors  $R_b = R_a$ .
- Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.
- Utilisation de la règle de d'Alembert.
- Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

**Régularité de la somme**

- Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
- Relation  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

**Développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction d'une variable réelle**

- Fonction développable en série entière.
- Série de Taylor d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$
- Unicité du développement en série entière.
- Développements des fonctions usuelles :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{Arctan}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .
- Utilisation d'une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

**Séries entières d'une variable complexe**

- Continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. (Admis)
- Développement de  $\frac{1}{1-z}$  sur le disque unité ouvert.

- Développement de  $\exp(z)$  sur  $\mathbb{C}$ .

## Variables aléatoires discrètes

### Généralités

- Définition d'une variable aléatoire discrète.
- Loi  $P_X$  d'une v.a. discrète.
- Variable aléatoire  $f(X)$ . Si  $X \sim Y$ ,  $f(X) \sim f(Y)$ .
- Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de  $Y$  sachant un événement  $A$ .
- Couple de variables aléatoires indépendantes. Extension au cas de  $n$  v.a. Suites de v.a. indépendantes, suites i.i.d.
- Si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ . Lemme des coalitions.

### Espérance et variance

- Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, +\infty]$ .
- Variable aléatoire  $X$  à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de  $X$ .
- Variable centrée
- Pour  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ .
- Formule du transfert.
- Linéarité, positivité et croissance de l'espérance.
- Si  $|X| \leq Y$  et  $E(Y) < +\infty$ , alors  $X$  est d'espérance finie.
- Si  $X \geq 0$  et  $E(X) = 0$ , alors  $(X = 0)$  est presque sûr.
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et d'espérance finie, alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$  (admis). (La réciproque est fausse). Extension à  $n$  variables.
- Si  $X^2$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :  $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ . Cas d'égalité.
- Définition de la variance. Ecart type. Formule de König-Huyghens.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$ .
- Variable réduite. Si  $\sigma(X) > 0$ ,  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.
- Covariance de deux v.a. Relation  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $\text{cov}(X, Y) = 0$ . (La réciproque est fausse.)
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$ .  
Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ . (La réciproque est fausse.) Extension à  $n$  variables.

### Fonctions génératrices

- Définition de la fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . La loi de  $X$  est entièrement caractérisée par  $G_X$ . Le rayon de convergence de  $G_X$  est  $\geq 1$ .  $G_X$  CVN sur  $[-1, 1]$  donc est continue.
- Lien série génératrice-espérance. Lien série génératrice-variance.
- Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

### Lois usuelles

*Les fonctions génératrices des variables suivant les lois usuelles doivent savoir être calculées rapidement par les étudiants.*

- Loi uniforme (loi+espérance dans le cas  $\mathcal{U}([a, b])$ )
- Loi de Bernoulli (loi+espérance+variance)
- Loi binomiale (loi+espérance+variance)
- Loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Espérance, variance. Interprétation comme rang du 1er succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ . Relation  $P(X > k) = (1 - p)^k$ .
- Loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Espérance, variance. Interprétation en termes d'événements rares.

### Inégalités probabilistes

- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres