

Programme de colles – Semaine 16 – du 02/02 au 06/02

Révisions de PCSI : Espaces préhilbertiens réels

- Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Exemples de référence : produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n (expression $X^T Y$), $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Inégalité triangulaire et cas d'égalité. Identités remarquables et formules de polarisation.
- Vecteurs orthogonaux. Orthogonal d'une partie. A^\perp est un sev. Familles orthogonales, orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Bases orthonormées d'un espace euclidien. Existence. Th de la bon incomplète. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- Projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F . Expression du projeté orthogonal dans une bon de F .
 $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui minimise la distance de x à un vecteur de F . Distance de x à F .
- Supplémentaire orthogonal d'un sev F de dimension finie. $\dim F^\perp$ si E est euclidien. Vecteur normal à un hyperplan.

Endomorphismes des espaces euclidiens

- Isométrie vectorielle Définition par la conservation de la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire et par l'image d'une base orthonormée. Exemple des symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Groupe orthogonal.
- Matrice orthogonale. Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée. Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Groupe orthogonal. Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.
- Description des matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.
- Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Théorème spectral (admis). Forme matricielle du théorème spectral. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale. Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale.