Programme de colles – Semaine 18 – du 16/02 au 20/02

Espaces vectoriels normés

- Normes
  - Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Distance associée à une norme.
  - Normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Norme $\| \|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  - Boule ouverte, boule fermée, sphère.
  - Partie convexe. Convexité des boules.
  - Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.
- Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
  - Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.
- Comparaison des normes
  - Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
  - Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
- Topologie d'un espace vectoriel normé
  - Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.
  - Fermé d'un espace normé. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.
  - Point adhérent à une partie, adhérence. Caractérisation séquentielle.
  - Partie dense.
  - Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
- Limite et continuité en un point
  - Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle.
  - Opérations algébriques sur les limites, composition.
  - Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
- Continuité sur une partie
  - Opérations algébriques, composition.
  - Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

  - Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
  - Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.
- Espaces vectoriels normés de dimension finie
  - Équivalence des normes en dimension finie (admis)
  - La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
  - Théorème des bornes atteintes (admis).
  - Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemples du déterminant, du produit matriciel.