

Programme de colles – Semaine 19 – du 16/03 au 20/03

Espaces vectoriels normés

- Normes
 - Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Distance associée à une norme.
 - Normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Norme $\| \cdot \|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
 - Boule ouverte, boule fermée, sphère.
 - Partie convexe. Convexité des boules.
 - Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.
- Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
 - Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.
- Comparaison des normes
 - Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
 - Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
- Topologie d'un espace vectoriel normé
 - Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.
 - Fermé d'un espace normé. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.
 - Point adhérent à une partie, adhérence. Caractérisation séquentielle.
 - Partie dense.
 - Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
- Limite et continuité en un point
 - Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle.
 - Opérations algébriques sur les limites, composition.
 - Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
- Continuité sur une partie
 - Opérations algébriques, composition.
 - Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

- Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.
- Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.
- Espaces vectoriels normés de dimension finie
 - Équivalence des normes en dimension finie (admis)
 - La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
 - Théorème des bornes atteintes (admis).
 - Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Calcul différentiel

- Dérivabilité des fonctions vectorielles
 - Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle. Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
 - Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire, et $f, g, f_1, \dots, f_p$ à valeurs vectorielles. Application au produit scalaire et au déterminant. Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles.
 - Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.
- Fonctions de plusieurs variables
 - Dérivée en un point selon un vecteur. Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue. Différentielle de f en a .
 - Règle de la chaîne. Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$. Application au calcul des dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$. Cas particulier des coordonnées polaires. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.
 - Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Relation $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.
 - Dérivées partielles d'ordre 2. Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz (admis). Matrice hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admis).