Programme de colles – Semaine 6 – du 02/11 au 06/11

Compléments d'algèbre linéaire

- Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces.
  - Somme directe. Caractérisation des sommes directes par l'unicité de la décomposition du vecteur nul
  - En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base
  - $\dim(\sum_{i=1}^{p} F_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$, avec égalité ssi la somme est directe
- Matrices par blocs et sous-espaces stables
  - Matrices définies par blocs, opérations
  - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
  - Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
  - Si u et v commutent, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

    Traduction matricielle de la stabilité d'un sev par un endomorphisme. Interprétation en termes d'endomorphisme d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs
- Matrices semblables et trace
  - Matrices semblables. Caractérisation : deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme. Invariance du déterminant par similitude
  - Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
  - Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.
- Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées
  - Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

    Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
  - Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
  - Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.
- Interpolation de Lagrange
  - Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$. Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
  - Déterminant de Vandermonde.

Révisions de PCSI : Suites numériques

Monotonie d'une suite, cas des suites récurrentes d'ordre 1. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. Limites, opérations sur les limites, stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'existence d'une limite : encadrement, majoration, minoration, th. de la limite monotone, th. des suites adjacentes. Suites extraites. Suites complexes.

Séries numériques

Révisions de PCSI

— Séries. Sommes partielles, convergence, divergence. En cas de convergence : somme et restes.

— Linéarité de la somme.

— Si $\sum u_n$ converge, $u_n \to 0$. Divergence grossière.

— Séries télescopiques (lien suite-série). Séries géométriques (sommes partielles, CNS de convergence, somme en cas de convergence). Séries de Riemann (CNS de convergence).

— Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : par $\leq$ et par $\sim$.

— Méthode des rectangles pour encadrer les sommes partielles de $\sum f(n)$ pour f continue et monotone.

— Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.

— Théorème de comparaison par O (ou o) pour les séries absolument convergentes.

Note aux colleurs : Les complément sur les séries (d'Alembert, séries alternées, produit de Cauchy) ne sont pas encore au programme cette semaine.