Programme de colles – Semaine 8 – du 16/11 au 20/11

Révisions de PCSI : Dénombrement.

Cardinal d'un ensemble fini. Opérations sur les cardinaux. Nombre de p-listes (d'éléments distincts ou non), de permutations, de sous-ensembles, de sous-ensembles de cardinal p...d'un ensemble de cardinal n.

Espaces probabilisés

- Ensemble dénombrable. Ensemble au plus dénombrable. Description en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$. Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Famille sommable d'éléments de $[0, +\infty]$ ou de $\mathbb{C}$. Croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.
- Univers. Tribu. Définition, stabilité par intersection dénombrable. Espace probabilisable. Événements.
- Probabilité, σ-additivité. Espace probabilisé.
- Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.
- Événement presque sûr, événement négligeable.
- Continuité croissante, continuité décroissante. Corollaires : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\Big)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\Big)$, pour une suite quelconque d'événements.
- Sous-additivité
- Probabilités conditionnelles. P_B définit une probabilité.
- Formule des probabilités composées
- Système complet d'événements, système quasi-complet d'événements.
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes
- Indépendance de deux événements. Caractérisation par les probabilités conditionnelles.
- Indépendance d'une famille finie d'événements. (L'indépendance deux à deux n'entraîne pas toujours l'indépendance mutuelle)
- Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Réduction des endomorphismes et des matrices

Éléments propres

— Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque. Équation aux éléments propres.

— Caractérisation : x est un vecteur propre de f ssi $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f

— Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

— Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.

— Les sous-espaces propres sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des vp distinctes est libre.

Note aux colleurs :

— Les notions de sommabilité et de dénombrabilité ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste. La notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition.