Révisions du concours blanc : Proposition de planning

I Planning général

Ce planning est évidemment donné à titre indicatif. Il peut être réordonné, vous pouvez regrouper et travailler les math 1 jour sur 2..., mais, quel que soit votre planning, tenez-le. Pensez à bien répartir votre planning sur toutes les matières (ne négligez pas anglais, français et informatique).

Prenez bien le temps de relire le cours et de reprendre les exemples de base. Veillez à la maîtrise des fonctions usuelles (dérivées, primitives, DL, DSE). Prenez bien le temps de revoir les théorèmes avec beaucoup d'hypothèses à vérifier (IPP et CDV sur les intégrales généralisées, continuité, dérivation, intégration des suites et séries de fonctions etc.)

Proposition de blocs de révisions (7 blocs de 2 jours) :

1. Fonctions, intégration, équadiffs
2. Algèbre linéaire
3. Suites et séries numériques.
4. Réduction
5. Suites et séries de fonctions, séries entières
6. Dénombrement, probabilités, variables aléatoires
7. Espaces vectoriels normés, espaces euclidiens

II Détails

Les listes de cette partie ne sont pas exhaustives. Il va de soi que l'intégralité du programme des 2 années est à connaître. N'hésitez pas à vous référer aux programmes officiels de PCSI et de PC ainsi qu'à vos programmes de colles hebdomadaires des 2 années.

II.1 Fonctions

- Révisions sur les réels : intervalles, différences entre minorant/minimum/borne inférieure (ou majorant/maximum/borné supérieure), partie entière, valeur absolue.
- Révisions sur les complexes/trigonométrie : module, argument, conjugaison, exponentielle complexe, nombres de module 1, racines n-ièmes de l'unité, formules trigo, formules d'Euler et de Moivre. Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes.
- Définitions de limites avec quantificateurs, continuité. Opérations sur les limites, stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Définition de dérivabilité avec taux d'accroissement, rapport avec les DL. Dérivée d'une composée, d'une réciproque, dérivées d'ordre n.
- Étude de fonction. Détermination de domaines de définition, continuité, dérivabilité (en particulier pour les fonctions composées). Calculs de limites, prolongements par continuité. Calculs de dérivées et de primitives (revoir les dérivées usuelles, surtout celles que vous maîtrisez moins bien : $\mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arccos}, \tan\ldots$). Équation de la tangente en un point.
- Primitives à connaître/savoir calculer : puissances, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ / $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$, $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$, $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.
- Sur les fonctions usuelles (exp, ln, $x \mapsto x^a$ (en fonction de a), cos, sin, tan, Arccos, Arcsin, Arctan, ch, sh) vérifiez que vous connaissez les ensembles de définition/continuité/dérivabilité, les expressions des dérivées, et des primitives au programme, que vous connaissez les limites aux bornes, la parité, les valeurs en 0, que vous savez tracer les courbes représentatives.
- Théorèmes sur les fonctions continues : théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection, théorème des bornes atteintes, théorème de la limite monotone
- Théorèmes sur les fonctions dérivables : extremum local (condition nécessaire en un point intérieur), théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de la limite de la dérivée, formule de Leibniz.
- Fonctions convexes. Interprétation géométrique. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux dois dérivables.
- Analyse asymptotique : définitions de o, O, $\sim$. Croissances comparées. Développements limités. Formule de Taylor-Young. Applications diverses des DL

Feuilles d'exercices : 0 – Révisions sur les fonctions
Sujets de devoirs :

- DM1 (Petites Mines) : Etude de fonctions, suites, intégrales, équation différentielle.
- DS1 – Premier problème (Petites Mines) : Etude de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et calcul de son intégrale sur $[0,1]$.
- DS1 – Second problème (Petites Mines) : Etude de fonction. Suites implicites. Fonctions définies par une intégrales. Equadiffs.

II.2 Algèbre linéaire

— Sous-espaces vectoriels (deux méthodes de démonstration génériques : vérification des 3 hypothèses $F \subset E$, $0 \in F$, stabilité par combinaison linéaire / mise sous forme de Vect. Autres possibilités : image ou noyau d'une application linéaire). Opérations sur les sev : intersection, somme.

— Familles libres, familles génératrices, bases. (pour les démonstrations sur les bases, différencier les cas où on ne connaît pas encore la dimension : libre+génératrice, et les cas où la dimension finie est connue : libre+$\operatorname{card} B = \dim E$ ou calcul du déterminant). Rang d'une famille de vecteurs.

— Somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires. ($F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$ en dimension finie, $F \cap G = \{0\}$ et $F + G$ ou analyse-synthèse en dimension quelconque). Base adaptée à une décomposition en somme directe.

— Dimension finie. Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite. Sev d'un espace de dimension finie, relations sur les dimensions. Formule de Grassmann.

— Applications linéaires, endo/iso/automorphismes. Démonstration de la linéarité, détermination de noyaux, d'images. Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau. Espaces isomorphes. Rang d'une application linéaire, théorème du rang. Formes linéaires. Hyperplans.

— Utilisation du pivot de Gauss : résolution de systèmes, inversion de matrices. Opérations élémentaires sur les systèmes ou les matrices. Matrices échelonnées (réduites). Rang.

— Calcul matriciel : connaître le coefficient (i, j) du produit de 2 matrices, formule du binôme, transposée (d'une somme, d'un produit, d'un inverse), matrices symétriques et antisymétriques. Calcul de rang. Trace. Matrices semblables. Calcul d'inverse.

— Endomorphismes remarquables : homothéties, projections, symétries. Matrices dans des bases adaptées. Caractérisations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{id}$.

— Déterminant d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme. Calculs, effets des opérations linéaires, des opérations matricielles et de la composition. Déterminant d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une ligne/colonne. Liens avec l'inversibilité, les bases, la bijectivité.

— Matrices d'applications linéaires. Matrice de passage. Changements de base (pour les vecteurs, les applications linéaires et le endomorphismes)

— Produit de p sev. Dimension.

— Somme de p sous-espaces vectoriels, somme directe.Base adaptée à une décomposition en somme directe, décomposition en somme directe par partition d'une base. Dimension d'une somme, d'une somme directe.

— Matrices par blocs, opérations. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Sous-espaces stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Traduction matricielle de la stabilité. Si u et v commutent, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ stables par v.

— Trace d'une matrice carrée, linéarité, trace d'une transposée. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Invariance par similitude. Trace d'un endomorphisme

— Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances. $P(u)$ et $Q(u)$ commutent. $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par u.

— Interpolation de Lagrange. Base constituée des polynômes interpolateurs, expression d'un polynôme dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs vaut 1. Déterminant de Vandermonde. Lien avec l'interpolation de Lagrange.

Feuilles d'exercices : Chapitre 2

Sujets de devoirs :

— DM3 (CCP TSI) : Endomorphismes cycliques

— DM8 (CCP PSI) : Partie I : Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

— DS2 – Exercice 1 (Banque PT) : Matrices unipotentes

— DS2 – Exercice 3 (E3A MP) : Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.3 Suites numériques

- Monotonie, suites majorées/minorées/bornées. Définition de limite (finie ou non) avec quantificateurs. Convergence (limite finie), divergence (limite infinie ou pas de limite). Opérations sur les limites, stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 : détermination du terme général. Somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Théorèmes d'existence d'une limite : théorème d'encadrement, théorèmes de minoration et de majoration, théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes.
- Suites extraites (sous-suites) : utilisation pour montrer la divergence d'une suite.

Feuilles d'exercices : Chapitre 3
Sujets de devoirs :

- DM1 (Petites Mines) : Etude de fonctions, suites, intégrales, équation différentielle.
- DS1 – Second problème (Petites Mines) : Etude de fonction. Suites implicites. Fonctions définies par une intégrales. Equadiffs.

II.4 Dénombrement/Probabilités discrètes

- Factorisation de $a^n - b^n$, définition des coefficients binomiaux, relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, formule/triangle de Pascal, formule du binôme.
- Arithmétique : multiples, diviseurs, division euclidienne, PGCD, PPCM. Nombres premiers. Décomposition en produit de facteurs premiers.
- Cardinal d'un ensemble fini, d'un sous-ensemble d'un ensemble fini (avec CNS d'égalité), opérations sur les cardinaux : union disjointe, union quelconque, complémentaire, produit cartésien. Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$, de $\mathcal{P}(E)$.
- p-listes, p-combinaisons, p-arrangements dans un ensemble de cardinal n. Nombre de permutations.
- Ensemble dénombrable. Familles sommables.
- Tribu, événement, lien entre vocabulaire ensembliste et probabiliste (et/$\cap$, ou /$\cup$, incompatible/disjoint...). Espace probabilisable. Système complet d'événements.
- Probabilité, σ-additivité. Espace probabilisé. $P(A \cup B)$, $P(A \setminus B)$, $P(\bar{A})$. Propriétés : continuité (dé)croissante et leurs corollaires, sous-additivité. Evénement presque sûr, événement négligeable. Système quasi-complet d'événements.
- Probabilité conditionnelle : définition, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
- Evénements indépendants (définition, caractérisation), familles d'événements indépendants. A et B indépendants $\Rightarrow$ A et $\bar{B}$ indépendants.

Feuilles d'exercices : Chapitre 4
Sujets de devoirs :

- DM5 – Exercice 1 (Centrale TSI) : Suite d'événements, probabilités totales, suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- DM5 – Exercice 2 (Ecricome ECS) : Suite infinie de lancers de pièces. Continuité croissante.
- DS3 – Sujet 1 – Problème 2 (CCINP PSI) : Les matrices de Kac. Partie IV : suite d'événements, probabilités totales.
- DS4 – Sujet 2 (Mines PSI) : Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.

II.5 Séries numériques

- Terme général, somme partielle, convergence/divergence. Somme et restes en cas de convergence. Linéarité de la somme. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0$ (réciproque fausse). Divergence grossière.
- Séries géométriques. CNS de convergence, sommes partielles, somme.
- Séries télescopiques.
- Séries à termes positifs. Comparaison par majoration et par équivalence.
- Séries de Riemann
- Séries absolument convergentes. Comparaison par O/o. Inégalité triangulaire.
- Techniques de comparaison série-intégrale.
- Formule de Stirling
- Règle de d'Alembert.
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Feuilles d'exercices : Chapitre 3
Sujets de devoirs :

- DM4 – Exercice 1 (E3A PC) : Etude de suites de sommes partielles. Comparaison série/intégrale.
- DM4 – Exercice 2 (CCP L2) : Série harmonique, série produit.
- DS3 – Sujet 1 – Problème 1 (E3A PSI) : Convergence de séries numériques

II.6 Intégration

- Lien intégrale-primitive (théorème fondamental de l'analyse/de l'intégration)
- Intégration sur un segment. Intégration par parties . Changement de variable. Linéarité, positivité, croissance. $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$. Relation de Chasles. Si f continue, de signe constant $\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
- Sommes de Riemann.
- Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Fonctions continues par morceaux. Intégrale sur un segment d'une fonction cpm.
- Intégrales généralisées. Définitions, convergence, divergence. Relation de Chasles. Linéarité, positivité, croissance.
- Théorème de changement de variable
- Théorème d'intégration par parties.
- Intégrale absolument convergente. $CVA \Rightarrow CV$. Fonctions intégrables. Espace $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$. Inégalité triangulaire. f continue et $\int_I |f| = 0 \Rightarrow f = 0$.
- Théorème de comparaison pour les fonctions intégrables ($\leq, O/o, \sim$).
- Fonctions intégrable de référence : $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en 0 et en $+\infty$, $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$, ln en 0.
- Intégrabilité de $\frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a. Plus généralement, savoir passer de a^+ ou b^- à 0 (via $f(a+t)$ ou $f(b-t)$).

Feuilles d'exercices : Chapitre 1
Sujets de devoirs :

- DM2 (EPITA-IPSA) : Intégrales généralisées (étude de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$)
- DM8 (Mines PC) : Première et deuxième parties : Convergence et calcul d'intégrales, IPP, CDV.
- DS1 – Exercice : Fonction définie à l'aide d'une intégrale.
- DS2 – Exercice 2 (BECEAS) : Intégrales généralisées de Dirichlet (convergence d'intégrales, IPP, changements de variables)
- DS4 – Sujet 1 – Problème 2 (CCP PC) : Quelques questions autour de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \mathrm{d}t$

II.7 Réduction

— Polynômes : opérations (somme, produit, composée), degré (en particulier d'une somme, d'un produit), coefficient dominant. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Dérivation, formule de Taylor. Racines, caractérisation par la divisibilité, nombre de racines, multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Polynôme irréductible. Somme/produit des racines en fonction des coefficients. Décomposition en facteurs irréductibles.

— Droite stable. Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, équation aux éléments propres. $u \circ v = v \circ u \Rightarrow$ les sep de l'un sont stables par l'autre. Spectre. Un somme finie de sous-espaces propres est directe. Une famille finie de $\vec{vp}$ associés à des vp distinctes est libre.

— $u(x) = \lambda x \Rightarrow P(u)(x) = P(\lambda)x$ $P(u) = 0 \Rightarrow$ toute vp de u est racine de P.

— Adaptation de tout ce qui précède aux matrices carrées.

— Polynôme caractéristique, ses racines sont les valeurs propres. Coeffs de degrés 0 et $n-1$. Ordre de multiplicité d'une vp, $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$. Invariance de χ_A, donc des vp et de leurs multiplicités par similitude. Expression de $\det A$ et $\operatorname{tr} A$ en fonction des valeurs propres quand χ_A est scindé. Théorème de Cayley-Hamilton.

— Endomorphismes/matrices diagonalisables. Définition.

— Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. 3 caractérisations (par les sep, par les dimensions des sep, par le polynôme caractéristique). Condition suffisante de diagonalisabilité (n vp ou χ_A scindé à racines simples)

— CNS de diagonalisabilité via les polynômes annulateurs (2 caractérisations : il existe un polynôme annulateur SARS, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur). L'endomorphisme induit par un endomorphisme DZ sur un sev stable est DZ.

— Endomorphismes/matrices trigonalisables. Définition. Caractérisation par le polynôme caractéristique. Tout endomorphisme/matrice est TZ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Feuilles d'exercices : Chapitre 5
Sujets de devoirs :

— DM6 (E3A PC) : Polynômes annulateurs, réduction de matrice 3×3.

— DS3 – Sujet 1 – Problème 2 (CCINP PSI) : Les matrices de Kac. Réduction de matrices 3×3, d'un endomorphisme sur un espace de fonctions de dimension finie, de matrices $n \times n$.

— DS3 – Sujet 2 (CentraleSupélec PC) : Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$.

II.8 Séries entières

— Lemme d'Abel. Rayon de convergence. Intervalle/disque ouvert de convergence. Convergence absolue si $|z| < R$, divergence grossière si $|z| > R$.

— Comparaison des rayons de convergence dans les cas $a_n = O(b_n)$, $|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = o(b_n)$, $a_n \sim b_|$, $\sum n a_n z^n$. $\sum n^\alpha x^n = 1$. Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy. Utilisation de la règle de d'Alembert.

— Fonction somme d'une série entière. Convergence normale sur tout segment $\subset]-R, R[$. Continuité, caractère $\mathcal{C}^\infty$, dérivation terme à terme, primitivation terme à terme sur $]-R, R[$. Relation coefficients/dérivées successives en 0.

— Fonctions développables en série entière au voisinage de 0. Série de Taylor. Unicité du DSE. DSE usuels : $e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \dfrac{1}{1-x}, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$.

— Solutions DSE d'équations différentielles.

— Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence. Développements de $\dfrac{1}{1-z}$ et $\exp(z)$.

Feuilles d'exercices : Chapitre 7
Sujets de devoirs :

— DM8 (CCP PSI) : Partie III : Résolution d'équadiff à l'aide de séries entières. Produit de Cauchy.

— DS4 – Sujet 1 – Problème 3 (CCINP PC) : Un jeu de société. Séries entières, fonction génératrice, espérance, loi binomiale.

— DS4 – Sujet 2 (Mines PSI) : Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.

II.9 Equations différentielles

— Pour tous les types d'équadiffs : forme des solutions/structure de l'espace des solutions, principe de superposition, théorème de Cauchy.

— Equations différentielles d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$. Résolution de l'équation homogène. Méthode de la variation de la constante.

— Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$. Résolution de l'équation homogène. Solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$, $x \mapsto B\sin(\omega x)$.

Feuilles d'exercices : Chapitre 7
Sujets de devoirs :

— DM1 (Petites Mines) : Etude de fonctions, suites, intégrales, équation différentielle.

— DM8 (CCP PSI) : Partie II : Résolution d'équations différentielles. Changements de fonctions inconnues. Raccordement des solutions. Partie III : Résolution d'équadiff à l'aide de séries entières.

— DM8 (Mines PC) : Deuxième et troisième parties : recherche de développements en série entière, solutions DSE d'équadiffs.

— DS1 – Second problème (Petites Mines) : Etude de fonction. Suites implicites. Fonctions définies par une intégrales. Equadiffs.

II.10 Variables aléatoires discrètes

— Variable aléatoire discrète. Loi. Variable $f(X)$. $X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$.

— Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi de Poisson, loi géométrique. Connaître $X(\Omega)$, loi, espérance, variance. (savoir retrouver la fonction génératrice). Reconnaître les lois binomiale/géométrique comme nombre de succès/rang du premier succès dans des suites d'épreuves de Bernoulli de même paramètre et indépendantes.

— Couple de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle.

— Variables aléatoires indépendantes. Suites de v.a. indépendantes, suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(x) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Lemme des coalitions.

— Espérance d'une va à valeurs dans $[0, +\infty]$. V.a. réelle ou complexe X d'espérance finie. Espérance de X. V.a. centrée. Relation $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$, si $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Formule du transfert. Linéarité de l'espérance. $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty \Rightarrow X$ est d'espérance finie. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance. $X \geq 0$ et $E(X) = 0 \Rightarrow$ $(X = 0)$ est presque sûr.

— X^2 d'espérance finie $\Rightarrow X$ d'espérance finie. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité. Variance, écart-type. Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Variable réduite. $V(aX + b)$.

— Covariance. Définition, $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\operatorname{cov}(X, Y)$.

— Fonction génératrice. Rayon ≥ 1, CVN sur $[-1, 1]$. G_X caractérise la loi de X. Liens entre fonction génératrice, espérance et variance.

— En cas d'indépendance : $E(XY) = E(X)E(Y)$, $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, $G_{X+Y} = G_X G_Y$. (toutes les réciproques fausses en général). Extension à n v.a.

— Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Feuilles d'exercices : Chapitre 8
Sujets de devoirs :

— DS4 – Sujet 1 – Problème 1 (E3A PC) : Loi uniforme, variables indépendantes, minimum/-maximum d'une suite de v.a., espérance, variance, covariance.

— DS4 – Sujet 1 – Problème 3 (CCINP PC) : Un jeu de société. Séries entières, fonction génératrice, espérance, loi binomiale.

— DS4 – Sujet 2 (Mines PSI) : Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.

II.11 Espaces vectoriels normés

- Norme, espace vectoriel normé. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Norme $\| \|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire. Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Parties convexes. Convexité des boules. Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
- Suites d'un EVN. Convergence/Divergence. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Convergente $\Rightarrow$ bornée. Suite extraite et convergence.
- Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
- Topologie. Point intérieur à une partie. Partie ouverte. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité des ouverts par $\cup$ quelconque, par $\cap$ finie. Partie fermée. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère sont des fermés.

  Point adhérent à une partie. Adhérence. Caractérisation séquentielle. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
- Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle.

  Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
- Continuité sur une partie. Opérations algébriques, composition. Image réciproque d'un ouvert/d'un fermé par une application continue. Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors $\{x \in E | f(x) > 0\}$ est un ouvert et les ensembles $\{x \in E | f(x) = 0\}$ et $\{x \in E | f(x) \geq 0\}$ sont des fermés. Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.
- Équivalence des normes en dimension finie. Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction/de la suite dans une base de l'espace d'arrivée. Théorème des bornes atteintes. Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemples du déterminant et du produit matriciel.

Feuilles d'exercices : Chapitre 10

II.12 Suites et séries de fonctions

— Suites de fonctions. Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. CVU $\Rightarrow$ CVS. Norme $\|\cdot\|_\infty$.

— Continuité de la limite d'une suite de fonctions (avec cas de la CVU sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés). Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (avec cas de la CVU sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés). Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

— Séries de fonctions. Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS. CVN $\Rightarrow$ CVA en tout point. Utilisation d'une majoration uniforme de $|f_n(x)|$ pour montrer la CVN.

— Continuité de la somme (avec cas de la CVU sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés). Théorème de la double limite. Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment. Dérivation terme à terme d'une série de fonctions (avec cas de la CVU sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés). Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Feuilles d'exercices : Chapitre 6
Sujets de devoirs :

— DM7 (EPITA-IPSA) : Famille de séries de fonctions. Convergence normale, continuité. Recherche d'équivalents via des comparaisons séries-intégrales.

— DS4 – Sujet 1 – Problème 2 (CCP PC) : Etude d'une famille de fonctions. Convergence simple et uniforme de la suite de fonctions. Convergence simple et normale de la série de fonctions.

II.13 Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens

— Produit scalaire, espace préhilbertien, espace euclidien. Exemples de référence : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (expression X^TY), $\int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

— Norme associée à un produit scalaire. Distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Inégalité triangulaire (cas d'égalité). Développements de $\|u+v\|^2$ et $\|u-v\|^2$. Formules de polarisation.

— Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie (c'est un sev). Familles orthogonales, orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

— Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la b.o.n. incomplète. Coordonnées d'un vecteur, expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

— Supplémentaire orthogonal en dimension finie, dimension. Vecteur normal à un hyperplan en dimension finie. Projection orthogonal sur un sev F de dimension finie Expression du projeté orthogonal dans une bon de F. Distance à un sev de dimension finie, elle est atteinte au projeté orthogonal (et c'est le seul point où elle est attente).

— Isométries vectorielles. Exemple des symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée. Groupe orthogonal $O(E)$. Stabilité de l'orthogonal d'un sev stable.

— Matrices orthogonales. Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisations par comme matrices de changement de base orthonormée. Caractérisation d'une isométrie à l'aide de sa matrice dans une bon.

  Groupe orthogonal d'ordre n ($O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$). Déterminant d'une matrice orthogonale Groupe spécial orthogonal ($SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$). Orientation. Bases orthonormées directes.

— Isométries vectorielles d'un plan euclidien. Matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

— Endomorphisme autoadjoint. Caractérisation par sa matrice dans une bon de E. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Théorème spectral. Forme matricielle. Endomorphisme autoadjoint (défini) positif. Caractérisation spectrale. Matrice symétrique (définie) positive. Caractérisation spectrale.

Feuilles d'exercices : Chapitre 9
Sujets de devoirs :

— DM9 – Exercice 1 (E3A PC) : Produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$, orthonormalisation, projetés orthogonaux, distance à un sev.

— DM9 – Exercice 2 (Mines PC) : Polynômes de Laguerre. Produit scalaire défini par une intégrale, famille orthogonale de polynômes.

— DM10 (E3A PSI) : Matrices orthogonales, matrices symétriques.