## Devoir surveillé de mathématiques n° 1 – Corrigé

### Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $[x, 2x]$.
   En utilisant le changement de variable $u = -t$, (et donc $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$),
   on obtient $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{ch}(-u)}{-u}(-\mathrm{d}u) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{ch}(u)}{u}\mathrm{d}u$.
   Donc $f(x) = f(-x)$. De plus, $\mathbb{R}^*$ est centré en 0.
   Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$
2. Soit $x > 0, t \in [x, 2x]$. La fonction ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc
   $\mathrm{ch}(x) \leqslant \mathrm{ch}(t) \leqslant \mathrm{ch}(2x)$. De plus, $\frac{1}{t} > 0$ donc $\boxed{\frac{\mathrm{ch}(x)}{t} \leqslant \frac{\mathrm{ch}(t)}{t} \leqslant \frac{\mathrm{ch}(2x)}{t}.}$
   Par croissance de l'intégrale sur le segment $[x, 2x]$, on obtient :
   $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(x)}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(2x)}{t}\mathrm{d}t$
   *i.e.* $\mathrm{ch}(x)[\ln(t)]_x^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{ch}(2x)[\ln(t)]_x^{2x}$
   puis $\mathrm{ch}(x)\ln(\frac{2x}{x}) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{ch}(2x)\ln(\frac{2x}{x})$.
   On obtient bien $\boxed{\ln(2)\,\mathrm{ch}(x) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\,\mathrm{ch}(2x).}$
3. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(2)\,\mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(2)\,\mathrm{ch}(2x) = \ln(2)$.
   D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \ln(2)$.
   Par parité, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \ln(2)$.
   Donc $f$ admet une limite finie en 0, égale à $\ln(2)$.
   Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en posant } f(0) = \ln(2).}$
4. En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, $g$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc y admet des primitives.
   Soit $x > 0$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\boxed{f(x) = G(2x) - G(x).}$
5. $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive de $g$ donc $f$ est dérivable et
   $\boxed{\forall x > 0, f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}(x)}{x}.}$
6. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}(x) &\underset{x \to 0}{=} (1 + \frac{4x^2}{2}) - (1 + \frac{x^2}{2}) + o(x^2) \\ &\underset{x \to 0}{=} \frac{3x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

   puis $f'(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}(x)}{x} \underset{x \to 0}{=} \frac{3x}{2} + o(x)$.
   Ainsi $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 0}$.

Par parité, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0$

Or $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'$ admet une limite finie en 0.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$

**Premier problème** *(D'après Mines Albi Alès Douai Nantes 2010)*

**PARTIE I :**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est défini si et seulement si $1+x > 0$ et $x \neq 0$. Donc $\boxed{D = ]-1, 0[\cup]0, +\infty[.}$

2. $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$

   On a donc $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. $f$ admet une limite finie en 0.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ admet en } 0 \text{ un prolongement par continuité, on pose } f(0) = 1.}$

   Et on aura ainsi $D' = ]-1, +\infty[$.

3. D'après la question précédente, $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$.

   $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0 donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}}$

   *(la dérivée est le coefficient d'ordre 1 du développement limité.)*

   $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$ par quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Soit $x \in D$. $\boxed{f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}.}$

   $$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x - (1+x)(x - x^2/2 + o(x^2))}{(1+x)x^2} = \frac{x - x + x^2/2 - x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

   $$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

   donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2} = f'(0)$ donc $f'$ est continue en 0 puis $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } D'.}$

4. Pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{k(x)}{\underbrace{(1+x)x^2}_{>0}}$ donc $f'$ est du signe de $k$ sur $D$.

   $k$ est dérivable (par somme et produit) sur $D'$ et, pour tout $x \in D'$,

   $k'(x) = 1 - \ln(1+x) - 1 = -\ln(1+x)$. Donc $k'(x) > 0$ si $x < 0$ et $k'(x) < 0$ si $x > 0$.

   Puisque $k(0) = 0$, on en déduit le signe de $k$ et donc de $f'$ (sauf en 0).

   Pour finir, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (par quotient de limites) et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ (par croissances comparées).

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $k(x)$ | ‖ | ↗ | $0$ | ↘ | |
| $k(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | -1/2 | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↘ | $0$ |

**PARTIE II :**

5. D'après la partie précédente, $f$ (prolongée) est continue sur le segment $[0,1]$ donc $\boxed{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \text{ est bien définie.}}$

6. Soit $t \in [0,1]$. Par somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t$ ($\neq 1$),
$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \dfrac{1-(-t)^n}{1-(-t)}$,
d'où $\boxed{1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}}$

7. Soit $x \in [0,1]$, $P_n(x) = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1})\mathrm{d}t$
$= \int_0^x \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t$ par la question précédente
$= \int_0^x \dfrac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^x \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}\mathrm{d}t$ par linarité.
d'où $\boxed{P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \dfrac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t.}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$. $|R_n(x)| = |\int_0^x \dfrac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t| \leqslant \int_0^x |\dfrac{(-t)^n}{1+t}|\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n\mathrm{d}t$
(par croissance de l'intégrale car $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$, car $t \geqslant 0$).
Or $\int_0^x t^n\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ d'où $\boxed{|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}.}$

9. La fonction $Q_n$ est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$.
$Q_n'(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.
donc $\boxed{Q_n'(x) = \dfrac{P_n(x)}{x}.}$

10. Soit $x \in [0,1]$. $g_n(x) = Q'_n(x) - f(x)$ d'où $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (Q'_n(x) - f(x))\mathrm{d}x$

    $= [Q_n(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = Q_n(1) - L$

    Donc $|Q_n(1) - L| = |\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\mathrm{d}x$

    De plus, $|g_n(x)| = |\dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}| = |\dfrac{1}{x}(-R_n(x))| = \dfrac{|R_n(x)|}{x} \leqslant \dfrac{x^n}{n+1}$ d'après la question 8.

    Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = [\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}$

    On a bien $\boxed{|Q_n(1) - L| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.}$

    On a $0 \leqslant |Q_n(1) - L| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Or $\dfrac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

    Par le théorème d'encadrement, $\boxed{Q_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L.}$

11. Pour $N = 99$, on a $|Q_N(1) - L| \leqslant \dfrac{1}{100^2} = 10^{-4}$, donc $\boxed{Q_{99}(1) \text{ appoxime } L \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$

12. On a $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$. On peut renvoyer $Q_n(1)$ pour $n = \lfloor \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor$ par exemple.

    Il s'agit alors d'un simple calcul de somme : $Q_n(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

```
from math import sqrt
def L(epsilon):
    n=int(1/sqrt(epsilon))
    Q=0
    for k in range(1,n+1):
        Q=Q+(-1)**(k-1)/k**2
    return Q
```

**Second problème***(D'après Mines Albi Alès Douai Nantes 2007)*

**Partie A – Généralités**

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   Par composition, $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ puis, par produit, $\boxed{g \text{ l'est également}}$.

   Soit $t > 0$. $\boxed{tf'(t) = t \times \dfrac{1}{t^2}\exp(-1/t) = g(t)}$

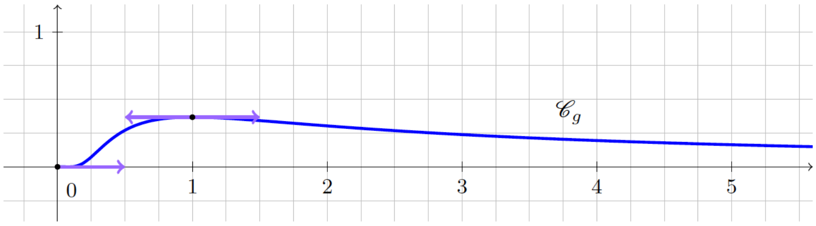
2. Par croissances comparées, $g(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Puisque $g$ admet une limite finie en 0,

   $\boxed{\text{elle est prolongeable par continuité en } 0}$.

   On a ensuite $\dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \dfrac{1}{t^2}\exp(-1/t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi, $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0}$ avec $g'(0) = 0$.

3. $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall t > 0, g'(t) = \exp(-1/t)(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2}) = \exp(-1/t)\frac{1}{t^3}(1-t)$, d'où le tableau de variations suivant :

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $e^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |




4. (a) $t \mapsto g(1/t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en particulier, $\boxed{\forall t > 0, H(t) = \int_1^t g(1/u)\mathrm{d}u = \int_1^t ue^{-u}\mathrm{d}u.}$
Les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,t]$. Par intégration par parties,
$H(t) = [-ue^{-u}]_1^t - \int_1^t -e^{-u}\mathrm{d}u = -te^{-t} + e^{-1} - [e^{-u}]_1^t$ donc $\boxed{H(t) = -(t+1)e^{-t} + 2e^{-1}.}$
(b) On pose $t = 1+h$. $H(t) = H(1+h) = -(2+h)e^{-1-h} + 2e^{-1} \underset{h\to 0}{=} -(2+h)e^{-1}(1-h+h^2/2-h^3/6+o(h^3)) + 2e^{-1}$
$H(1+h) \underset{h\to 0}{=} e^{-1}(-2+2h-h^2+h^3/3-h+h^2-h^3/2+2+o(h^3)) = e^{-1}(h-h^3/6+o(h^3))$
donc $\boxed{H(t) \underset{t\to 1}{=} e^{-1}(t-1) - \frac{e^{-1}}{6}((t-1)^3) + o((t-1)^3).}$

5. Soit $n \geqslant 3$.
(a) $(E_n) \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{n}$.
Puisque $g$ est continue et strictement croissante sur $]0,1[$, elle réalise une bijection de $]0,1[$ dans $]0,e^{-1}[$.
Or $n \geqslant 3$ donc $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$. Donc $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent $\alpha_n$ par $g$ dans $]0,1[$.
Ainsi, $\boxed{(E_n) \text{ a une unique solution } \alpha_n \text{ dans } ]0,1[.}$
(b) On a $g(\alpha_n) = \frac{1}{n} > g(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. La fonction $g$ étant strictement croissante, on a nécessairement $\alpha_n > \alpha_{n+1}$. Donc $\boxed{(\alpha_n)_{n\geqslant 3} \text{ est (strictement) décroissante.}}$
Par les mêmes arguments, avec la stricte décroissance de $g$ sur $]1,+\infty[$,
$\boxed{(\beta_n)_{n\geqslant 3} \text{ est (strictement) croissante.}}$
(c) On suppose $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \geqslant 0$ (même raisonnement pour $\beta_n$). Par continuité de $g$ sur $\mathbb{R}_+$, $g(\alpha_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(l)$. Donc $g(l) = 0$. Nécessairement, d'après l'étude de $g$, $l = 0$.

$\boxed{\text{il est impossible qu'une des suites converge vers une limite } l > 0}$

Or $(\alpha_n)$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente par le théorème de la limite monotone. Ainsi, elle converge vers une limite positive ou nulle. D'après ce qui précède, on a donc $\boxed{\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

De même, $(\beta_n)$ est croissante donc admet une limite (finie ou non) supérieure à 1. D'après ce qui précède, la limite ne peut donc pas être finie et $\boxed{\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

## Partie B – Fonctions définies par des intégrales

6. On a bien $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$ donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. On a déjà vu que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De plus, pour $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{g(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissances comparées. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $f$ est dérivable en 0 avec $\boxed{f'(0) = 0}$, et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f'(0)$ donc $f'$ est continue en 0.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

   En 0, $0 \times f'(0) = 0 = g(0)$, $\boxed{\text{l'égalité reste valable.}}$

7. (a) Les fonctions $f$ et $g$ (prolongées) sont continues sur $[0, x]$, d'où $\boxed{\text{l'existence des intégrales}}$.

   $F(x) = \displaystyle\int_0^x 1.f(t)\mathrm{d}t$. Par intégration par parties (avec les fonctions $u : t \mapsto t$ et $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$),

   $$\boxed{F(x) = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t = xe^{-\frac{1}{x}} - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x).}$$

   (b) Soit $x \geqslant 1$.

   Par la relation de Chasles, $G(x) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{e^{-1/t}}{t}\mathrm{d}t$. Par croissance de l'intégrale, puisque $e^{-1/t} \leqslant 1$, $\boxed{G(x) \leqslant C + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = C + \ln x}$ en posant $C = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

   De plus, $\boxed{0 \leqslant G(x)}$ par positivité de l'intégrale.

   (c) Soit $x > 0$. $0 \leqslant \dfrac{G(x)}{x} \leqslant \dfrac{C}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

   Par le théorème d'encadrement, $\dfrac{G(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ donc $\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x).}$

   On a $F(x) = xe^{-1/x} - G(x) = xe^{-1/x} + o(x)$ donc $\dfrac{F(x)}{x} = e^{-1/x} + o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

   Ainsi, $\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.}$

8. Les solutions de l'équation homogène $(H) : x^2y' + y = 0$ sont de la forme $y(x) = \lambda e^{1/x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   On cherche une solution particulière de $(E)$ sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{1/x}$, où $\lambda$ est une fonction dérivable à déterminer. En injectant dans $(E)$, on a $x^2(\lambda'(x)e^{1/x} - \dfrac{\lambda(x)}{x^2}e^{1/x}) + \lambda(x)e^{1/x} = x^2$ puis $\lambda'(x) = e^{-1/x}$. On peut choisir $\lambda(x) = F(x)$ puis $y_p(x) = F(x)e^{1/x}$.

   $\boxed{\text{Les solutions de } E \text{ sont de la forme } y : x \mapsto e^{1/x}(F(x) + \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}.}$

## $\boxed{\textbf{Partie C – Étude qualitative d'une équation différentielle}}$

9. On a $0^2y'(0) + y(0) = 0^2$ donc $\boxed{u_0 = y(0) = 0.}$

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $2xy'(x) + x^2y''(x) + y'(x) = 2x$. En évaluant en 0, $\boxed{u_1 = y'(0) = 0}$.

    On dérive à nouveau : $2y'(x)+2xy''(x)+x^2y^{(3)}(x)+2xy''(x)+y''(x) = 2$, puis $\boxed{u_2 = y''(0) = 2.}$

11. On suppose $y$ de la forme $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
    Alors $y(0) = \gamma = 0$ puis $y'(0) = \beta = 0$ et $y''(0) = 2\alpha = 2$ donc $y : x \mapsto x^2$.
    Alors $x^2y'(x) + y(x) = 2x^3 + x^2 \neq x^2$, $y$ n'est pas solution de $(E)$.
    $\boxed{\text{On ne peut pas avoir } y \text{ de cette forme.}}$

12. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.

    (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$
    Les fonctions $h : x \mapsto x^2$ et $y'$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$. On a $h'(x) = 2x$, $h''(x) = 2$ et $\forall k \geqslant 3, h^{(k)} = 0$.
    Par la formule de Leibniz,
    $$(hy')^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}{y'}^{(n-k)}(x) = x^2y^{(n+1)}(x)+n\times 2xy^{(n)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}2\times y^{(n-1)}(x)+\sum_{k=3}^{n} 0.$$
    En dérivant $n$ fois $(E)$, on obtient donc
    $x^2y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1) \times y^{(n-1)}(x) + y^{(n)} = 0$
    d'où $\boxed{x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.}$
    En évaluant en 0, on a $\boxed{u_n = -n(n-1)u_{n-1}.}$

    (b) On pose $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n = (-1)^n n!(n-1)!$ »
    On a $(-1)^2 2!1! = 2 = u_2$ d'où $\mathcal{P}(2)$.
    Soit $n \geqslant 2$, on suppose $\mathcal{P}(n)$.
    Alors $u_{n+1} = -(n+1)nu_n = -(n+1)n(-1)^n n!(n-1)! = (-1)^{n+1}(n+1)!n!$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$.
    Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 2, u_n = (-1)^n n!(n-1)!}$
    $y$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, elle admet à tout ordre un développement en limité en 0, d'après la formule de Taylor-Young. Il est donné par :
    $$y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = 0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k k!(k-1)!}{k!}x^k + o(x^n)$$
    $$\boxed{y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n}(-1)^k(k-1)!x^k + o(x^n).}$$