Devoir surveillé de mathématiques n^{o} 1
Samedi 16 septembre 2023
Durée : 4 heures

***

Documents et calculatrices interdits.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\mathrm{d}t \end{array}$

1. En utilisant le changement de variable $u = -t$, étudier la parité de f.

   On étudie désormais f sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $x > 0$. Montrer que $\forall t \in [x, 2x]$, $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{t} \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(t)}{t} \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(2x)}{t}$.
   En déduire que $\ln(2)\,\mathrm{ch}(x) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\,\mathrm{ch}(2x)$.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.
   On notera encore f la fonction ainsi prolongée, dans le reste de l'exercice.
4. Justifier que $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(t)}{t}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer, pour $x > 0$, $f(x)$ en fonction d'une primitive G de g. *(On ne cherchera pas à calculer G.)*
5. Déterminer $f'(x)$, pour tout $x > 0$.
6. A l'aide d'un développement limité, déterminer, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x)$. En déduire que f est dérivable en 0 ainsi que $f'(0)$.

Premier problème

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f.
3. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
   Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D'.
4. Etudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

PARTIE II :

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.

Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes

$P_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n}$

et $Q_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2^2} + \dfrac{X^3}{3^2} - \dfrac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n^2}$.

5. Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.
6. Justifier : $\forall t \in [0,1], 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$.
7. En déduire : $\forall x \in [0,1], P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

   Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$.
8. Etablir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
9. Comparer pour tout $x \in [0,1]$ $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
10. En notant g_n l'application définie pour tout x de $[0,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et par $g_n(0) = 0$, montrer :

$$|Q_n(1) - L| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

    En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$.
11. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approxime L à 10^{-4} près.
12. Ecrire une fonction Python `L(epsilon)` qui prend pour argument un nombre flottant `epsilon` et qui renvoie une valeur approchée de L à `epsilon` près.

Second problème

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Partie A – Généralités

1. Prouver que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0.
3. Faire un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$, en faire un graphe sachant que $e^{-1} \approx 0,36$ à 10^{-2} près.
4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto g(1/t)$ s'annulant en 1.
   (a) Justifier l'existence de H, l'exprimer à l'aide d'une intégrale puis la calculer.
   (b) En former un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.
5. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = t/n$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) En utilisant la question 3, montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0, 1[$, que l'on notera α_n. On montrerait identiquement (*mais ce n'est pas à faire*) que (E_n) admet une unique solution dans $]1, +\infty[$, que l'on notera β_n.
   (b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ sont monotones. (*Indication : On pourra comparer $g(\alpha_n)$ et $g(\alpha_{n+1})$.*)
   (c) Est-ce possible que l'une des suites converge vers une limite $l > 0$? En déduire leurs limites.

Partie B – Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

6. Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$; préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question 1 reste valable pour $t = 0$.
7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \ , \ G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier l'existence de ces intégrales *que l'on ne cherchera surtout pas à calculer* puis montrer que $F(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - G(x)$.
   (b) En séparant l'intégrale $G(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C réelle telle que pour tout $x \geqslant 1$,
$$0 \leqslant G(x) \leqslant C + \ln(x).$$
   (c) En déduire que $G(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y = x^2$, l'expression générale de la solution fera apparaître la fonction F.

Partie C – Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de $(E) : x^2y' + y = x^2$ cette fois sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons, *sans aucun calcul explicite de* y, déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

9. Que vaut $u_0 = y(0)$?
10. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.
11. Peut-on avoir y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?
12. Soit n un entier naturel.
    (a) On suppose ici $n \geqslant 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

    $$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.$$

    En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

    (b) Donner une expression de u_n utilisant une factorielle, valable pour tout $n \geqslant 2$; en déduire les développements limités (dont on justifiera l'existence) de y à tout ordre au voisinage de 0.