Programme de colles – Semaine 4 – du 09/10 au 13/10

Chaque colle débutera par l'un des items suivants :

- Démonstration de : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, *suivi de* deux matrices semblables ont la même trace.
- Démonstration de : Si u et v commutent, $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont stables par v.
- Écriture de la matrice dans la base canonique de 3 endomorphismes choisis par le colleur :
  - un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (ou une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$)
  - un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$
  - un endomorphisme de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

  les valeurs de m, n, p et q restant à la discrétion du colleur

Toute démonstration non sue ou méconnaissance des méthodes pour les matrices (y compris une confusion entre lignes et colonnes) entraînera une note < 10.

Révisions d'algèbre linéaire de PCSI

- Calcul matriciel
- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires
- Représentation matricielle des applications linéaires
- Endomorphismes remarquables (homothéties, projections, symétries)
- Déterminants

Compléments d'algèbre linéaire

- Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces.
  - Somme directe. Caractérisation des sommes directes par l'unicité de la décomposition du vecteur nul
  - En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base
  - $\dim(\sum_{i=1}^{p} F_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$, avec égalité ssi la somme est directe

- Matrices par blocs et sous-espaces stables
  - Matrices définies par blocs, opérations
  - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
  - Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
  - Si u et v commutent, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

    Traduction matricielle de la stabilité d'un sev par un endomorphisme. Interprétation en termes d'endomorphisme d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs
- Matrices semblables et trace
  - Matrices semblables. Caractérisation : deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme. Invariance du déterminant par similitude
  - Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
  - Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.
- Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées
  - Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
  - Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
  - Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.