

Programme de colles – Semaine 5 – du 16/10 au 20/10

Chaque colle débutera par la démonstration de l'un des items suivants :

- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, *suivi de* deux matrices semblables ont la même trace.
- Si u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .
- Déterminant de Vandermonde (énoncé en taille n , démonstration en taille 3 (cf exercice 35d fait en TD) ou en taille n au choix de l'étudiant)

Toute démonstration non sue entraînera une note < 10 .

Compléments d'algèbre linéaire

- Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
- Somme d'un nombre fini de sous-espaces.
 - Somme directe. Caractérisation des sommes directes par l'unicité de la décomposition du vecteur nul
 - En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base
 - $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$, avec égalité ssi la somme est directe
- Matrices par blocs et sous-espaces stables
 - Matrices définies par blocs, opérations
 - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
 - Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
 - Si u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .
Traduction matricielle de la stabilité d'un sev par un endomorphisme. Interprétation en termes d'endomorphisme d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs
- Matrices semblables et trace
 - Matrices semblables. Caractérisation : deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme. Invariance du déterminant par similitude
 - Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 - Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.
- Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées
 - Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Le noyau de $P(u)$ est stable par u .

- Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
- Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.
- Interpolation de Lagrange
 - Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de \mathbb{K} . Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points est le polynôme constant égal à 1.
 - Déterminant de Vandermonde.

Révisions de PCSI : Suites numériques

Monotonie d'une suite, cas des suites récurrentes d'ordre 1. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. Limites, opérations sur les limites, stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'existence d'une limite : encadrement, majoration, minoration, th. de la limite monotone, th. des suites adjacentes. Suites extraites. Suites complexes.

Séries numériques

Révisions de PCSI

- Séries. Sommes partielles, convergence, divergence. En cas de convergence : somme et restes.
- Linéarité de la somme.
- Si $\sum u_n$ converge, $u_n \rightarrow 0$. Divergence grossière.
- Séries télescopiques (lien suite-série). Séries géométriques (sommes partielles, CNS de convergence, somme en cas de convergence). Séries de Riemann (CNS de convergence).
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : par \leq et par \sim .
- Méthode des rectangles pour encadrer les sommes partielles de $\sum f(n)$ pour f continue et monotone.
- Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.
- Théorème de comparaison par O (ou o) pour les séries absolument convergentes.

Compléments

- Règle de d'Alembert

Note aux colleurs : Pour les séries cette semaine, pas encore de Stirling, TSSA et produit de Cauchy, ce sera pour la rentrée.