Devoir surveillé de mathématiques n° 2 – Corrigé

Exercice 1 : Matrices unipotentes *(D'après Banque PT – Math A 2023)*

1. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(A-I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x-2y+4z=2 \\ -2y+2z=2 \\ -2x-2y+4z=2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ x+y-2z=-1y+z=1 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=1+y \\ x=1+y \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (A-I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).}$$

Résoudre l'équation $(A-I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x-2y+4z=x \\ -y+2z=y \\ -2x-2y+5z=z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x-2y+4z=0 \\ -2y+2z=0 \\ -2x-2y+4z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=y=z.$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie } f(e_1) = e_1.}$$

$$AX = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + X \Leftrightarrow (A-I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, $\boxed{\text{le vecteur } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie } f(e_2) = 2e_1 + e_2.}$

$$\text{Enfin, } AX = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x-2y+4z=-2 \\ -2y+2z=0 \\ -2x-2y+4z=-2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y-2z=1 \\ y=z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1+z \\ y=z \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie } f(e_3) = -2e_2 + e_3.}$$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Ainsi, (e_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

D'après la question précédente, B représente f dans cette base.

Ainsi, $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie } A = PBP^{-1}.}$

2. (a) On voit que $\mathcal{N} = \mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$, et $E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc $\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

La famille $(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$ engendre donc $\mathcal{N}$ et est libre (en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), $\boxed{\text{il s'agit donc d'une base de } \mathcal{N}.}$

La dimension de $\mathcal{N}$ est le cardinal de ses bases, donc $\boxed{\dim \mathcal{N} = 3.}$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$

Alors $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{N} \text{ est stable par produit.}}$

(c) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\boxed{N^3 = 0_3.}$

3. (a) La matrice nulle n'appartient pas à $\mathcal{U}$ donc $\boxed{\mathcal{U} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

(b) Soit $U = I + N, U' = I + N' \in \mathcal{U}$ (avec donc $N, N' \in \mathcal{N}$).
$(I+N)(I+N') = I + N + N' + NN'$. $NN' \in \mathcal{N}$ par stabilité de $\mathcal{N}$ par produit, puis $N + N' + NN' \in \mathcal{N}$ car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On a donc $I + (N + N' + NN') \in \mathcal{U}$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{U} \text{ est stable par produit.}}$

(c) Soit $U \in \mathcal{U}$, alors $\det(U) = 1 \neq 0$ (produit des coefficients diagonaux car la matrice est triangulaire), donc U est inversible.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R}).}$

4. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant le calcul de N^2 effectué à la question 2c,

$$\boxed{B^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & -2\alpha(\alpha-1) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(b) Soit $U = I + N \in \mathcal{U}$.
Par stabilité par produit puis par combinaison linéaire, $\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$, donc $\boxed{U(\alpha) \in \mathcal{U}.}$

(c) Soit $U = I + N \in \mathcal{U}$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = (I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2)(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^2)$

$= I + (\alpha+\beta)N + (\alpha\beta + \dfrac{\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)}{2})N^2$ car $\forall k \geqslant 3, N^k = 0$.

Or $\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} = (\alpha\beta + \dfrac{\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)}{2})$

donc $\boxed{U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)}.}$

$\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = (I+\alpha N+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2)^{(\beta)} = I+\beta(\alpha N+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2)+\dfrac{\beta(\beta-1)}{2}(\alpha N+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2)^2$

$= I+\alpha\beta N + \dfrac{1}{2}(\beta\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)\alpha^2)N^2 = I+\alpha\beta N+\dfrac{1}{2}(\beta\alpha(\alpha-1+\alpha\beta-\alpha))N^2$

$= I+\alpha\beta N+\dfrac{1}{2}(\beta\alpha(\alpha\beta-1))N^2$.

$\boxed{\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}.}$

(d) $U^{(1)} = I + 1.N + \dfrac{1\times 0}{2}N^2 = I + n = U = U^1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $U^{(n)} = U^n$.

Par la question précédente, $U^{(n+1)} = U^{(n)}U^{(1)} = U^nU$ par l'initialisation et l'hypothèse de récurrence, d'où $U^{(n+1)} = U^{n+1}$.

On a bien prouvé par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, U^{(n)} = U^n.}$

(e) Soit $n \geqslant 2$. Les matrices I et N commutent.

Par la formule du binôme, $U^n = (I+N)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k N^k I^{n-k} = I + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2$ car $\forall k \geqslant 3, N^k = 0_3$.

On a bien $\boxed{U^{(n)} = U^n}$.

On a déjà prouvé que $\boxed{U^{(1)} = U^1}$ à la question précédente.

et on a $U^{(0)} = I + 0.N + \dfrac{0(0-1)}{2}N^2 = I$ donc $\boxed{U^{(0)} = U^0.}$

(f) Par la question 4c, on a $U^{(1)}U^{(-1)} = U^{(0)}$.

Par la question précédente, cela donne donc $UU^{(-1)} = I$ donc $\boxed{U^{(-1)} = U^{-1}.}$

5. (a) On a $B \in U$. Donc $B = B^{(1)} = B^{(1/2)}B^{(1/2)}$ d'après la question 4c.

Donc $\boxed{C = B^{(1/2)} \text{ vérifie } C^2 = B.}$

$\boxed{\text{Il n'y pas unicité.}}$ Par exemple, $-B^{(1/2)}$ vérifie la même relation.

(b) Avec les notations de la question 1c, $A = PBP^{-1} = PC^2P^{-1} = PCP^{-1}PCP^{-1} = (PCP^{-1})^2$.

Ainsi, $\boxed{D = PCP^{-1} \text{ vérifie } D^2 = A.}$

Exercice 2 : Intégrales généralisées de Dirichlet *(D'après BECEAS 2020)*

1. (a) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

   On a $g(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + o(t)$. g admet un développement limité d'ordre 1 en 0 donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. *(coefficient d'ordre 1 du* DL*)*

   De plus, pour tout $t \neq 0$,

   $g'(t) = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t - t^3/2 - t + t^3/6 + o(t^3)}{t^2} = -t/3 + o(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = g'(0).$

   Ainsi g' est continue en 0 donc $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

   <u>**Pour les 5/2 (ou si vous reprenez ce corrigé plus tard dans l'année) :**</u> On peut aussi montrer que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ et donc $\mathcal{C}^1$ sur son intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$.

   (b) i. Les fonctions $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, avec $\forall t > 0, u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.

   $u(t)v(t) = \dfrac{1 - \cos(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t^2/2 + o(t^2)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t/2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$

   et $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$ par produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0.

   Par le théorème d'intégration par paries, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t^2}\mathrm{d}t$.

   Or $\dfrac{\cos t - 1}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} -1/2$ donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t - 1}{t^2}\mathrm{d}t$ est faussement impropre.

   Et $0 \leqslant \left|\dfrac{\cos t - 1}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

   Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge puis $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

   ii. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto jt$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante donc bijective de $]0, +\infty[$ dans lui-même.

   Par changement de variable, et puisque la deuxième intégrale converge d'après la question précédente :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u/j}(1/j)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

   (c) $\ln g(t) = \ln \dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{=} \ln(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}) + o(t^4) = -\frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \frac{1}{2}(\frac{t^4}{36}) + o(t^4)$

   $$\boxed{\ln g(t) \underset{t\to 0}{=} -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4).}$$

(d) On procède par changement de variable. La fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{n}{3}}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\ln n}{\sqrt{n}}]$.

On a donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{3}\ln n} e^{-u^2/2}\sqrt{\frac{3}{n}}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{3}{n}}\int_0^{\sqrt{3}\ln n} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u$

Or, puisque $\sqrt{3}\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a par composition de limites $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}\ln n} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}.}$

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^n t}{t^n}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

$\dfrac{\sin^n t}{t^n} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$. L'intégrale est faussement impropre en 0.

Et pour tout $t \geqslant 1$, $|\dfrac{\sin^n t}{t^n}| \leqslant \dfrac{1}{t^n}$. Puisque $n \geqslant 2$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto \dfrac{\sin^n t}{t^n}$ également par majoration.

$\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\mathrm{d}t \text{ est bien convergente.}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t^2}\mathrm{d}t$

Par le changement de variable $t \mapsto 2t$ $\mathcal{C}^1$, strictement croissant bijectif de $]0, +\infty[$ dans lui-même et par convergence de la première intégrale,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2/4}(\mathrm{d}u/2) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u$

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times 2 \times \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{d}u$

En reprenant l'intégration par parties de la question 2b, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = 0 - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

Il vient $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$

3. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}\infty$ et 2π-périodique, donc la fonction $h_n^{(k)}$ l'est également. Par continuité de h_n sur une période (segment), h_n est bornée sur une période d'après le théorème des bornes atteintes, puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe un réel } K > 0 \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, |h_n^{(k)}(t)| \leqslant K.}$

(b) i. $\boxed{h_n(t) = \sin^n t \underset{t\to 0}{=} t^n + o(t^n)}$

ii. D'après l'indication admise, $h_n^{(k)}(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{n!}{(n-k)!}t^{n-k} + o(t^{n-k})$.

On a donc $h_n^{(k)}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}$ puis $\dfrac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

On a bien $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}.}$

(c) Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$.

La fonction $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

D'après la question précédente, cette fonction admet une limite finie en 0, donc l'intégrale est faussement impropre en 0, donc $\int_0^1 \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$ converge absolument.

D'après la question 3a, $\forall t \geqslant 1$, $\left|\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\right| \leqslant \frac{K}{t^{n-k}}$. Or $n-k \geqslant 2$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, ce qui entraîne la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$.

En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t \text{ est absolument convergente.}}$

(d) Les fonctions $h_n^{(n-2)}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Or $\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{n!/2 \times t^2}{t} = \frac{n!t}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

Et $\left|\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t}\right| \leqslant \frac{K}{t}$ donc $\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$ par encadrement.

Par intégration par parties, $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} \mathrm{d}t$ est donc de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

Or cette intégrale converge d'après la question précédente, donc

$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

On montre ensuite par récurrence finie que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$\mathcal{P}(k) : \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par définition de h_n.

Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

Les fonctions $u = h_n^{(k)}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{(k-n+1)t^{n-k-1}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$u(t) \times v(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} \frac{1}{(k-n+1)t^{n-k-1}} = \frac{n!}{(n-k)!(k-n+1)} t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

et $|u(t) \times v(t)| \leqslant \frac{K}{(k-n+1)t^{n-k-1}} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$ car $k < n-1$.

On peut donc utiliser une intégration par parties et

$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$ (hypothèse de récurrence)

$= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \frac{1}{(n-k-1)} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} \mathrm{d}t$ (par intégration par parties)

$= \frac{n-2-k}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} \mathrm{d}t = \frac{n-1-(k+1)}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-(k+1)}} \mathrm{d}t$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$, ce qui achève la récurrence. Ainsi, $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \mathcal{P}(k)$.

En particulier $\mathcal{P}(n-1)$ nous donne $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} \mathrm{d}t.}$

Exercice 3 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ *(D'après E3A MP 2021)*

1. $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degré, elle est donc libre. Puisque $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \lambda \in \mathbb{R}$.
   $\varphi(\lambda P+Q) = \displaystyle\int_0^1 (\lambda P+Q)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale,
   donc $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$, φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.
   En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$

   (b) $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.
   Puisque $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}t = 1$, $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \{0\}$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}.}$
   $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie, on sait par la formule du rang que $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + 1$
   donc $\boxed{\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n.}$

3. (a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $\psi(\lambda P + Q)(x) = \displaystyle\int_0^x (\lambda P + Q)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x P(t)\mathrm{d}t + \int_0^x Q(t)\mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale
   $= \lambda\psi(P)(x) + \psi(Q)(x)$.
   Donc $\psi(\lambda P + Q) = \lambda\psi(P) + \psi(Q)$.
   $\boxed{\text{L'application } \psi \text{ est linéaire.}}$

   (b) $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Ainsi, $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(1), \psi(X), \ldots, \psi(X^n))$
   $= \mathrm{Vect}(X, \dfrac{X^2}{2}, \ldots, \dfrac{X^{n+1}}{n+1})$
   On obtient bien $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1}).}$

   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \psi(P)(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ est racine de $\psi(P)$ $\Leftrightarrow (X-1)$ divise $\psi(P)$.
   On suppose que $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$, alors il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k(X-1) = (X-1)\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k$, donc $(X-1)$ divise $\psi(P)$.
   On suppose que $(X-1)$ divise $\psi(P)$. On sait que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$. Donc les polynômes de $\mathrm{Im}(\psi)$ sont de degré inférieur ou égal à $n+1$ et X divise tout polynôme de $\mathrm{Im}(\psi)$. Donc $X(X-1)$ divise $\psi(P)$, et il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\psi(P) = X(X-1)Q$. Il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, donc

$\psi(P) = X(X-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k+1}(X-1) = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} X^k (X-1)$ et donc $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.

Par double implication, on a bien montré

$\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)).}$

(d) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après la question précédente, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\psi(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k (X-1) = \sum_{k=1}^{n} a_k (X^{k+1} - X^k)$.

Or $P = \psi(P)'$ donc $P = \sum_{k=1}^{n} a_k((k+1)X^k - kX^{k-1})$.

Ainsi,

$\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(((k+1)X^k - kX^{k-1})_{k\in[\![1,n]\!]}) = \mathrm{Vect}(2X-1, 3X^2-2X, \ldots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$.

Or la famille $((k+1)X^k - kX^{k-1})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est échelonnée en degré donc libre, donc $\dim \mathrm{Vect}(((k+1)X^k - kX^{k-1})_{k\in[\![1,n]\!]}) = n$.

Or, d'après la question 2b

Par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(((k+1)X^k - kX^{k-1})_{k\in[\![1,n]\!]})$.

On a déjà montré que cette famille est libre donc

$\boxed{((k+1)X^k - kX^{k-1})_{k\in[\![1,n]\!]} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,\varphi.}$

4. (a) $\dim \mathcal{H} = \dim \mathbb{R}_n[X] \times \dim \mathbb{R} = (n+1) \times 1$

$\boxed{\dim \mathcal{H} = n+1}$

(b) On a $\mathrm{card}(\psi_0, \ldots, \psi_n) = n+1 = \dim \mathcal{H}$, il suffit donc de démontrer que cette famille est libre.

Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k = 0$.

Soit $i \in [\![0,n]\!]$, $P = X^i$. On $P^{(k)} = \dfrac{i!}{(i-k)!} X^{i-k}$ si $k \leqslant i$ et $P^{(k)} = 0$ si $i > k$. Dans tous les cas, si $k \neq i$, $P^{(k)}(0) = 0$. Ainsi, $\psi_k(X^i) = 1$ si $i = k$ et $\psi_k(X^i) = 0$ si $i \neq k$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k(X^i) = \lambda_i = 0$ par hypothèse. Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 0$, la famille est libre.

$\boxed{(\psi_0, \ldots, \psi_n) \text{ est une base de } \mathcal{H}.}$

(c) On décompose φ dans cette base. Il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k$.

En reprenant les calculs de la question précédente, $\varphi(X^k) = \lambda_k$. Or $\varphi(X^k) = \dfrac{1}{k+1}$.

Par conséquent, $\boxed{\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \psi_k.}$