PC Balzac 2023-24

Devoir surveillé de mathématiques n° 2
Samedi 14 octobre 2023
Durée : 4 heures

***

Documents et calculatrices interdits.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1 : Matrices unipotentes

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.
   On considère les matrices
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que
   $$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$
   On pourra utiliser la question précédente.
   (c) En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.
2. Étude de $\mathcal{N}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
   (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$. on a $NM \in \mathcal{N}$.
   (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.
3. Étude de $\mathcal{U}$.
   (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.
   (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
   (c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par
   $$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2$$
   On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.
   (a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. où B est la matrice définie à la question 1.
   (b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U(\alpha) \in \mathcal{U}$.

(c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

(d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n \text{ fois}}$

(e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?

(f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4 , expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?

(b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

Exercice 2 : Intégrales généralisées de Dirichlet

1. *Les sous-questions sont indépendantes.*
   (a) On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0\,; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

   Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. *(On pourra utiliser une intégration par parties.)*

   On **admet** l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

   ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\mathrm{d}t$.

   (c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

   (d) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

   Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\mathrm{d}t$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.
   (a) Vérifier que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$.
   Soit n un entier naturel au moins égal à 2.
   (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t, on a : $|h_n^{(k)}(t)| \leqslant K$.

   (b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

   ii. Établir l'égalité : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

   (On admettra qu'on peut obtenir le développement limité d'ordre $n-k$ de $h_n^{(k)}$ en 0 en dérivant k fois le développement limité d'ordre n de h_n en 0.)

   (c) Justifier, pour tout entier $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\mathrm{d}t$.

   (d) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\mathrm{d}t$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\mathrm{d}t$$

Exercice 3 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Définition : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**
   (a) Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$
   (a) Justifier que l'application ψ est linéaire.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.
   (c) Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
   (d) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   (a) Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
   (b) Pour $k \in [|0, n|]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
   (c) Déterminer les composantes de φ dans cette base.