Programme de colles – Semaine 8 – du 20/11 au 24/11

Espaces probabilisés

- Ensemble dénombrable. Ensemble au plus dénombrable. Description en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$. Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Famille sommable d'éléments de $[0, +\infty]$ ou de $\mathbb{C}$. Croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.
- Univers. Tribu. Définition, stabilité par intersection dénombrable. Espace probabilisable. Evénements.
- Probabilité, σ-additivité. Espace probabilisé.
- Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.
- Evénement presque sûr, événement négligeable.
- Continuité croissante, continuité décroissante. Corollaires : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$, pour une suite quelconque d'événements.
- Sous-additivité
- Probabilités conditionnelles. P_B définit une probabilité.
- Formule des probabilités composées
- Système complet d'événements, système quasi-complet d'événements.
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes
- Indépendance de deux événements. Caractérisation par les probabilités conditionnelles.
- Indépendance d'une famille finie d'événements. (L'indépendance deux à deux n'entraîne pas toujours l'indépendance mutuelle)
- Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Réduction des endomorphismes et des matrices

Elements propres

- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque. Equation aux éléments propres.
- Caractérisation : x est un vecteur propre de f ssi $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f
- Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
- Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des vp distinctes est libre.
- $u(x) = \lambda x \Rightarrow P(u)(x) = P(\lambda)x$. Si $P(u) = 0$, toute valeur propre de u est racine de P.

- Polynôme caractéristique χ_f d'un endomorphisme en dimension finie. Coefficients de degré 0 et $n-1$. Th : Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
- Multiplicité d'une valeur propre. Th : $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda$.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
- Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.
- Théorème de Cayley-Hamilton.
- Extension des définitions/résultats aux matrices carrées.

Endomorphismes/Matrices diagonalisables

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.
- Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
- Caractérisation 1 : f est diagonalisable ssi la somme de ses sous-espaces propres est égale à E
- Caractérisation 2 : f est diagonalisable ssi la somme des dimension de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.
- Caractérisation 3 : f est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.
- Condition suffisante de diagonalisablité : Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable (ou polynôme caractéristique scindé à racines simples.)
- Extension des définitions/résultats aux matrices.

Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

- f est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.
- f est diagonalisable ssi il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.

Endomorphismes/Matrices trigonalisables

- Définition des endomorphismes et matrices trigonalisables.
- Caractérisation : Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. (Admis).
- Corollaire : tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (ou toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est trigonalisable.
- *La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.*