PC Balzac 2023-24

Devoir surveillé de mathématiques n° 3
Samedi 25 novembre 2023
Durée : 4 heures

***

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Vous traiterez au choix un seul des deux sujets suivants :

— le sujet 1 (CCINP/E3A) constitué de deux problèmes indépendants. Calculatrices interdites.

— le sujet 2 (CentraleSupélec) constitué d'un problème unique. Calculatrices autorisées.

$\boxed{\text{SUJET 1}}$

Problème 1 : Séries numériques

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.
   (b) Déterminer l'ensemble I des réels x tels que la série $\sum nx^n$ converge.
   (c) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n$, pour $x \in I$. *(On pourra considérer le produit de Cauchy de la série $\sum x^n$ par elle-même).*
   (d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.
2. On prend **dans cette question**, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$, $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$.
   (a) Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$?
   (c) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$? *(On pourra faire une comparaison série intégrale.)*
   (d) Montrer que : $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (e) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = A_n - na_{n+1}$.
4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, na_{2n} \leqslant u_n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n}$.
   (c) Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
   (d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge.
   (e) A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?
5. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.
   (a) Vérifier que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, m \leqslant n, B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.
   (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
   (c) Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Problème 2 : Les matrices de Kac

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II** et **III**. La **Partie IV** est une utilisation probabiliste d'une des deux matrices de Kac.

On admet le résultat suivant (théorème spectral) : *toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*
3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.
4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

5. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

7. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
8. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \longrightarrow & V_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

9. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.
10. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad g_k \in V_n$.
11. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g'_k. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.
12. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

13. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\operatorname{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Krac de taille $n+1$

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n, On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k, l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

14. Soient $M = (m_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl}, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl}.
15. Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.
16. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et que :

$$\operatorname{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

Partie IV - Un peu de probabilités

Objectifs

Dans cette **partie**, on donne une application probabiliste de l'étude de la matrice A_n. Seul le résultat de la question 16 est utilisé, cette partie peut être traitée en admettant si besoin ce résultat.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. Pour $l \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{0,l}$ l'événement « Il y a initialement l boules dans l'urne U_1 » et $p_{0,l} = \mathbb{P}(E_{0,l})$ sa probabilité.

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $l \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'événement « Il y a l boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k » et $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$ sa probabilité.

<u>Exemple</u> : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne U_2 la boule 2. Dans ce cas, l'événement $E_{0,3}$ est réalisé.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. L'événement $E_{1,2}$ est alors réalisé.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. L'événement $E_{1,4}$ est alors réalisé.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$ le vecteur qui code les probabilités du nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.

17. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n})$?
18. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?
19. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in [\![0, n]\!]$, déterminer :

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}).$$

On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

20. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

21. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

où A_n est la matrice introduite dans la **Partie III**.

On suppose jusqu'à la fin du Problème qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2.

On admet alors que $\forall j \in [\![0, n]\!], \mathbb{P}(E_{0,j}) = p_{0,j} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{j}$. On note π le vecteur Z_0 associé.

22. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = Z_0$. *On pourra utiliser la question 16 de la **Partie III***.

23. Démontrer que π est l'unique distribution initiale de probabilités ayant la propriété suivante : si $Z_0 = \pi$, alors tous les vecteurs Z_k valent π.

FIN

$\boxed{\text{SUJET 2}}$

Calculatrices autorisées

Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée M^T.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que id_E appartienne à $\mathcal{A}$).

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $Mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
3. On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) | u(F) \subset F\}$.

4. Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
   On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.
6. Déterminer $\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice(i,j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

II.A - Calcul des puissances de J

10. Préciser les matrices J et J^2. (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geqslant 2$).
11. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
12. Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

II.B - Une base de $\mathcal{A}$

13. Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.
14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.
15. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C - Diagonalisation de J

16. Déterminer le polynôme caractéristique de J.
17. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
18. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
19. Déterminer les valeurs propres complexes de J est les espaces propres associés.

II.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
21. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$?

III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{tr}(M)$.

23. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne $A^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note r sa dimension.

24. Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base $(A_1, \dots, A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

25. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i, M \rangle = 0$.
26. Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B - Conclusion

Soit $\mathcal{A}^T = \{M^T | M \in \mathcal{A}\}$.

27. Montrer que $\mathcal{A}^T$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

28. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \mathrm{Vect}(A_1X, \dots, A_rX)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{A}^T$.
29. Montrer que $d \leqslant n^2 - n + 1$ et conclure.

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

Théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

30. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n - 1$.

31. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

32. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$
où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(u)$.
33. Montrer que $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.
34. Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.
35. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $T_n^+(\mathbb{C})$.

V. Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

V.A - Recherche d'un élément de rang 1

36. Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.
On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x) | u \in \mathcal{A}\}$.
37. Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :
$$0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v).$$
Considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}(v)$.
38. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

V.B - Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\operatorname{Ker} u_0$.

39. Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
40. Conclure