PC Balzac 2023-24

Devoir surveillé de mathématiques n$^{\text{o}}$ 3 – Corrigé sujet 1

Problème 1 : Séries numériques *(D'après E3A PSI 2016 – Math 1)*

1. (a) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^{n-1}}$ est une série géométrique de raison $1/2$. Puisque $|1/2| < 1$, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-1/2}$, d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2.}$

   (b) Si $x = 0$, les termes de la série sont tous nuls et la série converge.
   Soit $x \neq 0$. $|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{n+1}{n}|x| \sim \frac{n}{n}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$. Par la règle de d'Alembert, $\sum nx^n$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.
   Si $|x| = 1$, $|nx^n| = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $xx^n \not\to 0$, la série diverge grossièrement.
   En conclusion, $\boxed{I =]-1, 1[.}$

   (c) Soit $x \in I$. $|x| < 1$ donc $\sum x^n$ converge absolument. Par produit de Cauchy, $(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. *(on peut séparer car les deux séries convergent).*
   Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)^2 - -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-1+x}{(1-x)^2}$
   $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.}$

   (d) Soit $n \geqslant 1$. $b_n = n(a_n - a_{n+1}) = n(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}) = n(\frac{1}{2})^n$.
   Puisque $|1/2| < 1$, par les deux questions précédentes,
   $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2.}$

2. (a) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$. f est dérivable sur $[2, +\infty[$, comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   $\forall x \geqslant 2, f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2} \leqslant 0$ car $\ln(x) \geqslant \ln(2) \geqslant -1$. Ainsi, f est décroissante sur $[2, +\infty[$. Puisque $(a_n)_{n\geqslant 2} = (f(n))_{n\geqslant 2}$, $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$
   Par quotient de limites, $\boxed{a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

   (b) La suite (a_n) est à termes positifs. Puisqu'elle est décroissante et tend vers 0, par le théorème spécial des séries alternées, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n \text{ converge.}}$

   (c) f est décroissante sur $[2, +\infty[$. Soit $k \geqslant 3$, $t \in [k, k+1]$, alors $f(k) \geqslant f(t)$ puis, par croissance de l'intégrale, $f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t \geqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$.

Soit $N \geqslant 3$. On a alors $\sum\limits_{k=3}^{N} f(k) \geqslant \sum\limits_{k=3}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_3^{N+1} f(t)\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles.

Ainsi, $A_N - a_2 - a_1 \geqslant [\ln(\ln(t))]_3^{N+1}$ puis $A_N \geqslant \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(3)) + a_2$. Or $\ln(\ln(N+1)) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

Par minoration, $A_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \text{ diverge.}}$

(d) $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) = (n+1)\ln(n(1+\frac{1}{n})) - n\ln(n)$

$= (n+1)\ln(n) + (n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) - n\ln(n) = \ln(n) + (n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$

Or $(n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = 1 + o(1) = o(\ln(n))$

donc $\boxed{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

(e) Soit $n \geqslant 1$. $b_n = \dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}$.

Or $\sum a_{n+1}$ est une série divergente à termes positifs, d'après les questions précédentes. Par équivalence, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} b_n \text{ diverge.}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} ka_k - \sum\limits_{k=1}^{n} ka_{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} ka_k - \sum\limits_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k$

$= a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (k-(k-1))a_k - na_{n+1} = a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k - na_{n+1}$.

$\boxed{B_n = A_n - na_{n+1}.}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, donc $\forall p \in [\![n+1, 2n]\!], a_p \geqslant a_{2n}$, puis $\sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_p \geqslant \sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_{2n} = na_{2n}$.

On obtient bien $\boxed{na_{2n} \leqslant u_n}$.

(b) La suite (a_n) étant à termes positifs, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant na_{2n} \leqslant u_n \leqslant R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} a_n$.

Or $\sum a_n$ converge donc son reste $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} a_n$ tend vers 0.

Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0.}$

(c) On pose, pour $n \geqslant 1$, $c_n = na_n$.

D'après la question précédente, $c_{2n} = 2(na_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$c_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n}$ par décroissance de (a_n)

Donc $0 \leqslant c_{2n+1} \leqslant a_{2n} + c_{2n}$. $\sum a_n$ converge donc $a_n \to 0$, puis $a_{2n} \to 0$, on vient de démontrer que $c_{2n} \to 0$, donc $a_{2n} + c_{2n} \to 0$.

Par le théorème d'encadrement, $c_{2n+1} \to 0$.

Puisque ses deux sous-suites d'indices pairs et impaires convergent vers 0, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0.}$

(d) Soit $n \geqslant 1$. $B_n = A_n - na_{n+1} = A_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1} = A_n - c_{n+1} + a_{n+1}$.
Or (A_n) converge car la série $\sum a_n$ converge, et on a démontré à la question précédente que (a_n) et (c_n) convergent.
Par somme de suites convergentes, (B_n) converge, *i.e.* $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge.}}$

(e) Puisque $\lim c_{n+1} = \lim a_{n+1} = 0$, $\lim A_n = \lim B_n$.
On a bien $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.}$

5. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*, m \leqslant n$. $B_n - A_m - ma_{n+1} = A_n + na_{n+1} - A_m - ma_{n+1}$
$= \sum_{k=m+1} a_k + (n-m)a_{n+1} \geqslant 0$ en tant que somme de termes positifs.
On a bien $\boxed{B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}.}$

(b) On fixe $m \in \mathbb{N}^*$ et on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente.
On a alors $\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \geqslant A_m$ (car $\sum b_n$ converge et $a_n \to 0$).
Ainsi, $\sum a_n$ est une série à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée, donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge.}}$

(c) La série $\sum a_n$ est donc convergente, et (a_n) est une suite décroissante de réels positifs. On retrouve les hypothèses de la question 4.
On conclut d'après cette question que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.}$

Problème 2 : **Les matrices de Kac** *(D'après CCINP PSI 2020)*

Partie I - La dimension 3

1. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} X & 0 & -X \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{\text{lin.} L_1}{=} X \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$
$\underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X & -4 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2-4)$
$\boxed{\chi_A(X) = X(X-2)(X+2).}$

2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres réelles distinctes donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}}$.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristiques : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}}$
Les valeurs propres étant toutes simples,
$\boxed{\text{les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.}}$

3. $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X & 0 & X \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{\text{lin.} L_1}{=} X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$
$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{=} X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & X & 4 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2+4)$

$\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}[X],\ \chi_B(X) = X(X^2+4) \text{ et dans } \mathbb{C}[X],\ \chi_B(X) = X(X-2i)(X+2i).}$

$i\chi_B(iX) = i(iX)((iX)^2+4) = -X(-X^2+4) = X(X^2-4)$

donc $\boxed{\chi_A(X) = i\chi_B(iX).}$

4. χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$

   χ_B est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$

   On a $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\} \text{ et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, 2i, -2i\}.}$

   Toutes les valeurs propres étant simples,

   $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } B \text{ (sur } \mathbb{R} \text{ comme sur } \mathbb{C}) \text{ sont de dimension 1.}}$

5. Par calcul, $D^{-1}AD = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-i&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&i&0\\-2i&0&2i\\0&-i&0\end{pmatrix}.$

   $\boxed{D^{-1}AD = -iB.}$

6. $\Delta^{-1}A\Delta = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

   $$\boxed{\Delta^{-1}A\Delta = \begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}}$$

   Il s'agit d'une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et F diagonale telles que

   $\Delta^{-1}A\Delta = PFP^{-1}$ puis $A = \Delta PFP^{-1}\Delta^{-1} = (\Delta P)F(\Delta P)^{-1}$. Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie II - Étude d'un endomorphisme

7. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

   On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) = 0$.

   Montrons par récurrence forte finie que $\forall k \in [\![0,n]\!], \lambda_k = 0$.

   $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(\pi/2)\sin^{n-k}(\pi/2) = \lambda_0 = 0$

   Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_j = 0$.

   Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) = 0$.

   En particulier, pour tout $x \notin \{\pi/2 + m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$, on a, en divisant par $\cos^{j+1}(x)$:

   $\sum\limits_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^{k-j-1}(x)\sin^{n-k}(x) = 0$

   En faisant tendre $x \to \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda_{j+1} = 0$, d'où l'hérédité.

   En conclusion, on a bien $\forall k \in [\![0,n]\!], \lambda_k = 0$.

   $\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} = (f_0, f_1, \ldots, f_n) \text{ est libre.}}$

   Par définition de V_n, $\mathcal{F}$ est génératrice de V_n, donc $\mathcal{F}$ est une base de V_n.

   Ainsi, $\boxed{\dim V_n = \operatorname{card} \mathcal{F} = n+1}$

8. Par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, les f_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$
$f_0'(x) = n\cos(x)\sin^{n-1}(x) = nf_1(x)$.
$f_n'(x) = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x) = -nf_{n-1}(x)$.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. $f_k'(x) = -k\cos^{k-1}\sin^{n-k+1}(x) + (n-k)\cos^{k+1}\sin^{n-k-1}(x)$
$= kf_{k+1}(x) + (n-k)f_{k-1}(x)$.
On a bien $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], f_k' \in V_n.}$
φ_n est linéaire par linéarité de la dérivation. D'après ce qui précède, V_n est stable par dérivation, on a donc bien $\varphi_n(V_n) \subset V_n$.
Ainsi, $\boxed{\varphi_n \text{ définit bien un endomorphisme de } V_n}$
Les calculs sur les valeurs des f_k' amènent directement à $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi_n) = B_n.}$
9. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$g_k(x) = e^{i(2k-n)x} = e^{ikx}e^{i(k-n)x} = e^{ikx}e^{-i(n-k)x}$
On a bien $\boxed{g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k}.}$
10. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
$g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k}$
$= \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(\cos x)^j(i\sin x)^{k-j} \sum\limits_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell}(\cos x)^\ell(-i\sin x)^{n-k-\ell}$
$= \sum\limits_{j=0}^{k}\sum\limits_{\ell=0}^{n-k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{\ell}(-1)^{n-k-\ell}i^{n-j-\ell}(\cos x)^{j+\ell}(\sin x)^{n-j-\ell}$
$= \sum\limits_{j=0}^{k}\sum\limits_{\ell=0}^{n-k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{\ell}(-1)^{n-k-\ell}i^{n-j-\ell}f_{j+\ell}$
(On a bien $0 \leqslant j+\ell \leqslant k+n-k = n$)
donc $\boxed{g_k \in V_n.}$
11. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ on a $\boxed{g_k' = i(2k-n)g_k}$.
Les fonctions g_k n'étant pas nulles, elles sont donc $n+1$ vecteurs propres de φ_n associés aux valeurs propres distinctes $(i(2k-n))_{k\in[\![0,n]\!]}$.
Elles forment donc une famille libre de $n+1$ fonctions dans V_n, de dimension $n+1$, donc une base de V_n.
V_n possède une base formée de vecteurs propres de φ_n, donc $\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable}}$. On a ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k-n) | k \in [\![0, n]\!]\} = \{-in, i(2-n), \ldots, i(n-2), in\}.}$
et $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], E_{i(2k-n)}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(g_k).}$
12. φ_n est un automorphisme si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de φ_n, *i.e.* si et seulement si $\forall k \in [\![0, n]\!], k \neq \dfrac{n}{2}$.
$\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme si et seulement si } n \text{ est impair.}}$
13. On réutilise la décomposition de la question 10.
$g_n = \sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{n-n} \binom{n}{j}\binom{n-n}{\ell}(-1)^{n-n-\ell}i^{n-j-\ell}f_{j+\ell}$
$= \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}i^{n-j}f_j$
$\boxed{g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q_kf_k.}$
On a d'après la question 11, $E_{in}(\varphi_n) = \mathrm{Ker}(\varphi_n - in\,\mathrm{id}_{V_n}) = \mathrm{Vect}(g_n)$.

En passant aux représentations matricielles dans la base $\mathcal{F} = (f_0, \dots, f_n)$, on a bien

$$\boxed{\mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}}$$

Partie III - Les matrices de Krac de taille $n+1$

14. Soit $k, l \in [\![1, p]\!]$.
Par définition du produit matriciel, $[DM]_{k,l} = \sum\limits_{j=1}^{p} d_{k,j} m_{j,l}$.
Or D est diagonale, donc $d_{k,j} = 0$ si $k \neq j$
donc $\boxed{[DM]_{k,l} = d_{k,k} m_{k,l}.}$
De même, on trouve $\boxed{[MD]_{k,l} = m_{k,l} d_{l,l}.}$
15. Soit $k, l \in [\![1, n+1]\!]$. En utilisant les résultats de la question précédente :
$[D_n^{-1} A_n]_{k,l} = \dfrac{1}{d_{k,k}} a_{k,l}$
puis $\underbrace{[D_n^{-1} A_n D_n]_{k,l}}_{b_{k,l}} = [D_n^{-1} A_n]_{k,l} d_{l,l} = \dfrac{d_{l,l}}{d_{k,k}} a_{k,l} = i^{l-k} a_{k,l}$.
On a donc
    - $b_{k,k+1} = i a_{k,k+1} = ik = (-i)(-k) = -i[B_n]_{k,k+1}$, si $1 \leqslant k \leqslant n$
    - $b_{k,k-1} = -i a_{k,k-1} = -i(n-k+2) = -i[B_n]_{k,k-1}$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$
    - $b_{k,l} = 0 = -i0 = -i[B_n]_{k,l}$ sinon

    On en conclut $\boxed{D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n}$
Ainsi, A_n et $-iB_n$ sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique.
$\chi_{A_n}(X) = \chi_{-iB_n}(X) = \det(XI_{n+1} + iB_n) = \det(-i(iXI_{n+1} - B_n)$
$= (-i)^{n+1} \det(iXI_{n+1} - B_n)$.
$\boxed{\chi_{A_n}(X) = (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(iX).}$
16. D'après la **Partie II**, $\chi_{B_n}(X) = \prod\limits_{k=0}^{n} (X - i(2k-n))$
donc $\chi_{A_n}(X) = (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(iX) = (-i)^{n+1} \prod\limits_{k=0}^{n} (iX - i(2k-n))$
$= (-i)^{n+1} i^{n+1} \prod\limits_{k=0}^{n} (X - (2k-n)) = \prod\limits_{k=0}^{n} (X - (2k-n))$.
χ_{A_n} est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc
$\boxed{A_n \text{ est diagonalisable et les valeurs propres de } A_n \text{ sont les } 2k-n,\ k \in [\![0, n]\!].}$
Soit $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.
$A_n X = nX \Leftrightarrow -iD_n B_n D_n^{-1} X = nX \Leftrightarrow B_n(D_n^{-1}X) = in(D_n^{-1}X)$
$\Leftrightarrow D_n^{-1} X \in \mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(D_n \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix})$

$$D_n \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^0 q_0 \\ i^1 q_1 \\ \vdots \\ i^n q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^0 i^{n-0} p_0 \\ i^1 i^{n-1} p_1 \\ \vdots \\ i^n i^{n-n} p_n \end{pmatrix} = i^n \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

On en conclut $\operatorname{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \operatorname{Vect}(i^n \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix})$ puis $\boxed{\operatorname{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}}$

Partie IV - Un peu de probabilités

17. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   N_k représente le nombre de boules contenues dans l'urne U_1 après l'instant k. Ce nombre est compris entre 0 et n et ne peut pas prendre deux valeurs en même temps.
   $\boxed{\text{La famille } (E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}) \text{ est un système complet d'événements.}}$
18. $\boxed{\text{Si } j = 0}$, U_1 contient 0 boule et U_2 n boules, on piochera nécessairement une boule dans U_2 et on la mettra dans U_1, donc $\boxed{\text{à l'instant } k+1,\ U_1 \text{ contiendra 1 boule}}$
   De même, $\boxed{\text{si } j = n, \text{ alors à l'instant } k+1,\ U_1 \text{ contiendra } n-1 \text{ boules}}$.
   $\boxed{\text{Si } j \in [\![1, n-1]\!]}$, soit on enlèvera soit on rajoutera une boule dans U_1, donc
   $\boxed{\text{à l'instant } k+1,\ U_1 \text{ contiendra } j-1 \text{ ou } j+1 \text{ boules}}$.
19. <u>Si $j = 0$,</u> la seule façon d'obtenir 0 boules dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$ est qu'il y en ait eu 1 dans l'urne U_1 à l'instant précédent et qu'on l'enlève ; dans ce cas, on a 1 chance sur n de la choisir.
   On a donc $\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,1}}(E_{k+1,0}) = \dfrac{1}{n} \text{ et } \forall l \neq 1, \mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0}$
   <u>Si $j = n$,</u> la seule façon d'obtenir n boules dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$ est qu'il y en ait eu $n-1$ dans l'urne U_1 à l'instant précédent et qu'on enlève l'unique boule de U_2 ; dans ce cas, on a 1 chance sur n de la choisir.
   On a donc $\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n}) = \dfrac{1}{n} \text{ et } \forall l \neq n-1, \mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0}$
   <u>Si $j \in [\![1, n-1]\!]$,</u> les deux seules façons d'obtenir j boules dans l'urne U_1 l'instant $k+1$ sont :
   — qu'il y en ait eu $j-1$ à l'instant k et qu'on ait pioché l'une des $n-(j-1)$ boules de U_2
   — qu'il y en ait eu $j+1$ à l'instant k et qu'on ait pioché l'une des $j+1$ boules de U_1
   On a donc
   $$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \dfrac{n-j+1}{n}, \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \dfrac{j+1}{n} \\ \text{et } \forall l \notin \{j+1, j-1\}, \mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0 \end{array}}$$
20. La famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements.
   Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}(E_{k,l})\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = \mathbb{P}(E_{k,1})\frac{1}{n} + \sum_{l\neq 1} \mathbb{P}(E_{k,l}) \underbrace{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0})}_{=0}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1})}$

On obtient les deux autres égalités de la même manière en utilisant les résultats de la question précédente.

21. En traduisant matriciellement les égalités de la question précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_{k+1} = \dfrac{1}{n}A_n Z_k$.

    Par une récurrence immédiate, on en déduit $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ Z_k = \frac{1}{n^k}A_n^k Z_0}$

22. On a dans ce cas $Z_0 = \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$

    On a alors $Z_1 = \dfrac{1}{n}A_n \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$.

    Or d'après la question 16, $A_n \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$

    d'où $Z_1 = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{2^n}n \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = Z_0$.

    Par une récurrence immédiate, la suite (Z_k) est constante.

    Donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ N_k \text{ a la même loi que } N_0.}$

23. On suppose que toutes les variables N_k suivent la même loi que N_0. Alors, en particulier, $\dfrac{1}{n}A_n Z_0 = Z_1 = Z_0$, donc $A_n Z_0 = nZ_0$. Ainsi, $Z_0 \in \mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$

    $\exists \alpha \in \mathbb{R} | Z_0 = \alpha \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$. Or, la somme des coordonnées de Z_0 vaut 1 (c'est la somme des probabilités d'un système complet d'événements).

    Par la formule du binôme, $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ donc $\alpha = \dfrac{1}{2^n}$.

    puis $Z_0 = \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$.

    $\boxed{\text{La loi binomiale est l'unique loi vérifiant la propriété demandée.}}$