Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet traite de la réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire de la co-diagonalisation ou la co-trigonalisation des éléments d'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ (ou de $M_n(\mathbb{K})$, en adoptant un point de vue matriciel).

La notion de sous-algèbre est définie en introduction du sujet et la partie I propose de s'approprier cette notion, au travers d'exemples choisis, en dimension 2 et en dimension n : matrices symétriques, antisymétriques, triangulaires supérieures en section I-A, algèbre des endomorphismes laissant un sous-espace stable en section I-B et algèbres $\Gamma(\mathbb{R})$, $\Gamma(\mathbb{C})$ en section I-C. La partie II est consacrée à la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices circulantes, dont on démontre la co-diagonalisabilité dans $M_n(\mathbb{C})$ (alors que cette algèbre elle-même ne constitue pas une $\mathbb{C}$-algèbre).

La partie III propose de calculer la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $M_n(\mathbb{R})$, en recourant au produit scalaire canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et à la notion d'algèbre transposée, avec un retour sur les résultats de la section I-B, à la toute dernière question de cette partie.

Enfin, les parties IV et V proposent de démontrer la co-trigonalisation des éléments d'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'éléments nilpotents. En partie IV, on démontre ce résultat par récurrence forte sur la dimension de E et en s'appuyant sur un théorème de Burnside qu'on démontre, finalement, en partie V.

Analyse globale des résultats

Sur les 3473 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 24,4 %, pour un écart-type de 14,7 %. Le sujet peut donc être considéré comme long, mais il a permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses, bien plus que sur le volume traité. La meilleure copie a obtenu un total de 82 % des points du barème total.

Les parties I à III ont été abordées par la quasi-totalité des candidats (plus de 95 % d'entre eux), tandis que les parties IV (environ 60 %) et V (environ 25 %) l'ont moins été, principalement en raison de leur plus grande difficulté relative. Les parties I à III représentent environ 72 % des points du barème.

Comme mentionné plus haut, le soin mis à traiter les questions d'appropriation des termes du sujet a été un facteur important de sélection. Prenons pour exemple la section I-A, dont l'objectif est de s'approprier la notion de sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$, section traitée par la quasi-totalité des candidats (plus de 99,8 %). Près de 83 % d'entre eux ont obtenu moins de la moitié des points attribués, traduisant une certaine négligence à établir l'ensemble des propriétés d'une sous-algèbre et une mauvaise compréhension de la notion de contre-exemple (cf. plus loin). À l'opposé, seulement 1,7 % des candidats ont répondu parfaitement à l'ensemble des questions de cette section du sujet. On note les mêmes contrastes à la question **Q9**, quant à la notion de sous-algèbre diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$.

Le sujet comporte certains passages « classiques ». Par exemple, celui sur les matrices circulantes, en sections II-B, II-C et II-D, montre une distribution des résultats moins contrastée parmi les copies. Il en est de même pour la section III-A, relative au produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$. Certains candidats, ayant traité ces points pendant l'année, ont sans doute pu trouver davantage de repères.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

— *Toute réponse doit être justifiée*

Une réponse en une ligne donnant directement le résultat (attendu ou non), sans un minimum de contextualisation, est toujours mal perçue, souvent sanctionnée. Dans ce même ordre d'idée, il est fortement recommandé d'être attentif à la rédaction des premières questions de l'épreuve. Par exemple, en question **Q1**, il n'a malheureusement pas été rare de lire « $T_n(\mathbb{K})$ est clairement une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ » ou « par un raisonnement similaire, $T_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ ». Les notions de sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ et de matrice triangulaire supérieure stricte venant d'être (re)définies dans le sujet, il était de bon ton d'en vérifier point par point les propriétés.

— *Les variables utilisées par les candidats doivent être déclarées*

Il n'a pas été rare de voir apparaitre des A, B, x, y, α, β au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent. C'est parfois très malvenu, puisque le sujet s'autorise quelques aller-retours entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ qui peuvent créer de fortes confusions.

— *Le jury recommande aux candidats une posture d'humilité*

Notamment de bannir de leur rédaction des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment » et la fameuse « récurrence triviale ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Écrire, par exemple, à la question **Q1**, que « $T_n^+(\mathbb{K})$ est *trivialement* un espace vectoriel » montre surtout que le candidat a décidé de prendre de haut un point constitutif de la notion de sous-algèbre, qu'on demande de s'approprier dans ce qui est la toute première question du sujet. L'impression laissée, d'emblée, n'est pas bonne.

— *En guise de contre-exemples*

Les candidats préfèrent laisser des réponses impliquant des paramètres qui, s'ils sont bien choisis, ne constituent plus un contre-exemple à l'affirmation étudiée. Cette remarque concerne les questions **Q2**, **Q3**, **Q8**, entre autres. Par exemple, à la question demandant si $S_2(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{K})$, la majorité des candidats introduisent deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, effectuent le produit matriciel et en déduisent : « puisque $ab' + bc' \neq ba' + cb'$, alors le produit n'est pas une matrice symétrique », ce qui est faux, si on particularise les coefficients de ces deux matrices. De la même manière, à la question **Q8**, on lit très souvent que le polynôme $(X-a)^2 + b^2$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, sans avoir choisi $b \neq 0$ au préalable. Or, le polynôme $(X-a)^2$ est bien scindé sur $\mathbb{R}$. Les exemples de ce type sont très nombreux dans les copies.

— *Des formulations à éviter*

Des formulations telles que « on est en dimension finie » ou « on travaille en dimension finie » (par exemple en question **Q24**) sont mathématiquement imprécises et malvenues, notamment à l'écrit. Dans ce cas précis, il est bien plus pertinent de préciser quel espace est de dimension finie. Dans la question **Q24**, par exemple, il s'agit d'invoquer la dimension finie de l'espace $M_n(\mathbb{R})$ pour affirmer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^\perp$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

— *Inclusion / appartenance*

On a beaucoup lu le symbole d'inclusion à la place du symbole d'appartenance (et vice versa).

— *De nombreuses erreurs sur les quantificateurs*

Les confusions sur l'ordre des quantificateurs $(\forall, \exists)$ dans une proposition mathématique, ont malheureusement été très répandues. Citons par exemple, à la question **Q3**, ces nombreux candidats qui ont souhaité démontrer que pour tous $A, B \in S_n(\mathbb{K})$, on a $AB \notin S_n(\mathbb{K})$, alors qu'il suffit de montrer qu'il existe $A, B \in S_n(\mathbb{K})$ tels que $AB \notin S_n(\mathbb{K})$. On retrouve des problèmes tout à fait similaires aux questions **Q2**, **Q8**, **Q9** et **Q21**.

Le jury rappelle également que les *fautes de français*, même si elles ne sont pas explicitement comptabilisées dans le barème, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale. Malheureusement, cette épreuve a été loin de faire exception dans ce domaine.

I Exemples de sous-algèbres

Q1. Une sous-algèbre d'une algèbre $\mathcal{A}$ est avant tout un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$. De très nombreux candidats l'oublient et se contentent de démontrer (avec plus ou moins de réussite) la stabilité par produit, ce qui constitue une mauvaise appropriation des termes du sujet. Ici, il s'agit de faire ce double travail (structure de sous-espace vectoriel et stabilité par produit) pour $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$. Remarque analogue pour les questions **Q4**, **Q7**, **Q15** et **Q27**.

Q2. Voir les remarques générales, la mise en évidence d'un contre-exemple précis, reste le meilleur moyen de conclure, pour $S_2(\mathbb{K})$ comme pour $A_2(\mathbb{K})$. Par ailleurs, on a souvent lu des propositions de matrices antisymétriques avec des coefficients diagonaux non nuls.

Q3. De nombreux candidats proposent, pour seule réponse, un contre-exemple en taille 3 pour chacun des deux ensembles. Cela ne peut constituer une réponse suffisante. On peut, par exemple, proposer des matrices définies par blocs réutilisant les contre-exemples proposés à la question précédente.

Q4. Même remarque qu'en question **Q1**. Par ailleurs, beaucoup écrivent $(\lambda u + v)(F) = \lambda u(F) + v(F)$, alors qu'on a, à priori, la seule inclusion $(\lambda u + v)(F) \subset \lambda u(F) + v(F)$.

Q5. Nous avons trouvé très peu de réponses complètement satisfaisantes. De nombreuses fois, les candidats font référence à « la » base de E adaptée à F (et, parfois, à F et « son » supplémentaire). On rappelle aux candidats qu'en général, il n'y a pas unicité d'une base de E adaptée à un sous-espace vectoriel F (et qu'il existe une multiplicité de supplémentaires à un sous-espace vectoriel donné (hors E et l'espace nul)).

Q6. Le jury s'attendait à un bien meilleur taux de réussite sur une question d'un niveau tout à fait raisonnable (maximisation d'un trinôme du second degré sur un intervalle borné). On a noté de nombreuses erreurs sur les sens de variation, sur le calcul de la valeur du trinôme en $(n-1)$, etc.

Q7. Même remarque qu'en question **Q1**.

Q8. Voir remarques générales et question Q2 : il est beaucoup plus simple de proposer un contre-exemple précis comme la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ plutôt qu'un raisonnement général portant sur des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ (à moins qu'on pense à éliminer le cas $b = 0$ ce qui a été rarement fait.

Q9. On constate ici les premiers écarts de compréhension, parmi les candidats, de la notion de sous-algèbre diagonalisable. Il s'agit ici de trouver une base *commune* de diagonalisation des matrices de l'algèbre $\Gamma(\mathbb{C})$ et pas seulement de montrer que toute matrice de $\Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable. On a également trop souvent lu que la somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable (ce qui est, sans autre argument, faux).

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q10. Un certain nombre de candidats ont confondu la matrice J et la notation $J(a_0, ..., a_{n-1})$, se condamnant pour les trois questions à suivre.

Q13. Beaucoup de candidats sont partis de l'idée que $\dim \mathcal{A} = n$ (parfois vaguement justifiée par l'évocation, insuffisante, de « degrés de liberté »), se contentant d'établir le caractère libre, ou générateur, de la famille $(I_n, J, ..., J^{n-1})$ pour conclure. Or, ce résultat de dimension n'a, jusqu'à ce moment du sujet, jamais été établi.

Q15. Même remarque qu'en question **Q1**, outre le fait que dans l'expression « sous-algèbre commutative », de nombreux candidats ne voient que l'adjectif « commutative », ce qui ne compose qu'une partie de la question.

Q16. On note une maitrise très imparfaite du développement par rapport à une ligne ou une colonne, notamment pour ce qui est des facteurs $(-1)^{i+j}$ qui doivent apparaitre. Par ailleurs, le jury rappelle que la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée A, telle que stipulée dans le programme, est $\det(XI_n - A)$ (et non $\det(A - XI_n)$). Toutefois, aucune pénalité n'a été appliquée en cas d'usage de la seconde forme.

Q17 à **Q19**. Pour ceux (relativement nombreux) qui ont trouvé, par un raisonnement suffisamment étayé, le bon polynôme caractéristique $(X^n - 1)$ en question **Q16**, on note une bonne maitrise des racines n-ièmes de l'unité, allant, moins rarement qu'attendu, jusqu'à la détermination correcte des espaces propres de la matrice J en question **Q19**.

Q18. Peu de candidats ont pensé à mettre le cas $n = 2$ à part, pour lequel la matrice J est bien diagonalisable. Beaucoup ont répondu, à contrario, que le polynôme $X^n - 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est vrai que pour $n \geqslant 3$ (donc faux en toute généralité).

Q20. Très peu de candidats ont vu la subtilité de cette question (non stabilité par multiplication par un scalaire complexe non réel). À contrario, on a malheureusement beaucoup lu que toute sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$ est systématiquement une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$, « par inclusion ».

Q21 et **Q22**. Ces questions, lorsqu'elles ont été traitées, l'ont souvent été de manière satisfaisante.

III Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

Q23. Cette question (presque de cours) a été abordée par presque tous les candidats, avec un succès variable. Notons que la plupart connaissent bien les propriétés caractéristiques d'un produit scalaire. Parmi les erreurs relevées, on déplore toutefois la croyance selon laquelle $\mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}(A^2)$, puis que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant 0$, positivité sans doute acquise en raison de la présence d'un carré. Également parmi les erreurs rencontrées, on a souvent lu l'écriture, fausse en général, $\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$, au lieu de la somme double attendue $\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.

Q25. Beaucoup pensent que si une matrice M n'appartient pas à $\mathcal{A}$, alors elle appartient à son supplémentaire orthogonal $\mathcal{A}^\perp$, ce qui est grossièrement faux.

Q27. Même remarque qu'en **Q1**. On a également noté de nombreuses confusions entre la dimension de l'algèbre $\mathcal{A}$ et la taille des matrices qu'elle contient.

Q29. Question difficile, pour laquelle on a eu très peu de propositions pleinement satisfaisantes. Le jury a valorisé les bonnes idées et les pistes intéressantes.

IV Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Q30. Beaucoup de raisonnements alambiqués, là où il aurait suffi de remarquer que toute matrice de taille 1 est triangulaire, diagonale, etc.

Q31. De nombreuses copies invoquent une *réciproque* du théorème de Burnside, là où il fallait parler de *contraposée.*

Q32 à **Q35**. Peu de propositions, la plupart intéressantes sans être complètement satisfaisantes.

V Le théorème de Burnside

Q36 à **Q40**. Questions pour la plupart difficiles (voire très difficiles) et très peu traitées. La question **Q36** l'a été un peu plus que les autres, notamment par des copies plutôt faibles, les candidats pensant se trouver face à une question simple de début de partie (ce qui n'est pas le cas). Dans ces questions, le jury a veillé à valoriser les bonnes idées.

Conclusion

À l'écrit, il est absolument primordial de veiller à avoir bien répondu à toutes les parties d'une question et à avoir bien cité toutes les hypothèses des théorèmes utilisés. Le correcteur, à l'écrit (contrairement à l'examinateur, à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ; il faut donc que tout soit dit sur la copie. Par exemple, on pourra regretter cet oubli fréquent d'établir la structure de sous-espace vectoriel afin de conclure à la structure de sous-algèbre. C'est ainsi que beaucoup risquent de se retrouver déçus de leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes.

Nous tenons également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Et ce, à double titre :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines subtilités, c'est ainsi que beaucoup ont négligé certains aspects de la notion de sous-algèbre, de vérifier la validité des contre-exemples proposés, ou ont confondu diagonalisation et co-diagonalisation ;

- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, nous recommandons aux candidats de soigner leur écriture ; de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles et d'écrire dans un français correct.

Même si le jury n'a retenu aucun item de barème portant explicitement sur ces derniers points de forme, l'impression globale s'en ressent et ce facteur finit par avoir une influence, consciente ou non, sur la note attribuée.

Enfin, il n'était pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffisait de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette espèce.

Centrale M1 2019 - Corrigé

I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit, donc ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   Cependant, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$, mais $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$ et $C^2 = -I_2 \notin A_2(\mathbb{K})$, donc $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit, donc $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. En prenant $A_n = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$, $B_n = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$ et $C_n = \begin{pmatrix} C & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{K})$, on a $A_nB_n = \begin{pmatrix} AB & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$ et $C_n^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \notin A_n(\mathbb{K})$, donc $A_n(\mathbb{K})$ et $S_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables par produit, donc $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

4. • $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{L}(E)$ par définition de $\mathcal{A}_F$.
   • l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{A}_F$ car $0_{\mathcal{L}(E)}(F) = \{0_E\} \subset F$, donc $\mathcal{A}_F \neq \varnothing$.
   • Pour tout $(u,v) \in (\mathcal{A}_F)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in F$,
   $$(\lambda u + v)(x) = \lambda \underbrace{u(x)}_{\in F \text{ car } u \in \mathcal{A}_F} + \underbrace{v(x)}_{\in F \text{ car } v \in \mathcal{A}_F} \in F \text{ car } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E,$$
   donc $(\lambda u + v)(F) \subset F$, donc $\lambda u + v \in \mathcal{A}_F$.
   • $\mathcal{A}_F$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
   • De plus, pour tout $(u,v) \in (\mathcal{A}_F)^2$, $u \circ v(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$, donc $u \circ v \in \mathcal{A}_F$, donc $\mathcal{A}_F$ est stable par composition.
   • $\mathcal{A}_F$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
5. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
   Alors $u \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
   Comme $u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a
   $$\dim \mathcal{A}_F = \dim \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix},\ A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})\ C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\} = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - pn + p^2.$$
6. Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $n^2 - np + p^2 = \left(p - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2$, donc $(n^2 - pn + p^2)$ est maximum quand $\left(p - \frac{1}{2}n\right)^2$ est maximum, donc pour $p = 1$ ou $p = n-1$, et ce maximum vaut $\left(1 - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 = n^2 - n + 1$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

7. • $\Gamma(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(I_2, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{notée } C} \right)$, donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   • De plus, comme $C^2 = -I_2$, on a, pour tout $(aI_2 + bC, cI_2 + dC) \in \Gamma(\mathbb{K})^2$,
   $$(aI_2 + bC)(cI_2 + dC) = \underbrace{(ac - bd)}_{\in \mathbb{K}} I_2 + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{K}} C \in \Gamma(\mathbb{K}),$$
   donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit.
   • $\Gamma(\mathbb{K})$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
8. On a $\chi_C(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc C n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. • Comme $\chi_C(X) = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(i,-i)$ diagonale telles que $C = PDP^{-1}$.
   • Alors, pour tout $aI_2 + bC \in \Gamma(\mathbb{K})$,
$$P^{-1}(aI_2 + bC)P = aPI_2P^{-1} + bP^{-1}CP = aI_2 + b\mathrm{diag}(i,-i) = \mathrm{diag}(a+bi, a-bi),$$
   donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A - Calcul des puissances de J

10. • On a $J = Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(\varphi) = J(0,1,0,0,\ldots,0)$.
    • $J^2 = Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(\varphi^2)$.
    Or, pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$, $\varphi^2(e_i) = \varphi(e_{i+1}) = e_{i+2}$, $\varphi^2(e_{n-1}) = \varphi(e_n) = e_1$ et $\varphi^2(e_n) = \varphi(e_1) = e_2$, donc
$$J_2 = Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(\varphi^2(e_1),\ldots\varphi^2(e_n)) = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 2 \\ J(0,0,1,0,\ldots,0) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

11. Soit $n \geq 3$.
    On vérifie par le calcul que $J \times J(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) = J(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2})$, puis, par récurrence immédiate, on obtient : $J^k = J(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ ($a_k = 1$ et $a_i = 0$ pour tout $i \neq k$) et $J^n = I_n$.

12. On a $J(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{position } k},0,\ldots,0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$.

II.B - Une base de $\mathcal{A}$

13. • La famille $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est composée d'éléments de $\mathcal{A}$ d'après la question 11.
    • D'après la question 12, $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{A}$.
    • De plus, pour tout $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, toujours d'après la question 13, on a :
$$a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k J^k = 0_n \Leftrightarrow J(a_0,\ldots a_{n-1}) = 0_n \Leftrightarrow a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$
    donc la famille $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est libre.
    • $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est donc bien une base de $\mathcal{A}$, qui est donc de dimension n.

14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
    • Si M commute avec J, alors, par récurrence immédiate, M commute avec J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
    Par suite, pour tout $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,
$$MN = M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k M J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k M = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) M = NM,$$
    donc M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.
    • Réciproquement, si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$, M commute avec J car $J \in \mathcal{A}$.
    • par double-implication, on a donc bien l'équivalence souhaitée.

15. • $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
    • Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,
$$\begin{aligned} J^i N &= J^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+i} = \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k J^{k+i} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^n}_{=I_n} J^{k+i-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k \underbrace{J^{k+i}}_{\in\mathcal{A} \text{ car } k+i\in[\![0,n-1]\!]} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^{k+1-n}}_{\in\mathcal{A} \text{ car } k+i-n\in[\![0,n-1]\!]} \in \mathcal{A} \text{ comme combinaison linéaire d'éléments de } \mathcal{A}. \end{aligned}$$
    $\mathcal{A}$ est donc stable par produit, donc $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
    • Pour tout $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,
$$JN = J\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k J = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) J = NJ,$$

donc N commute avec J, donc, d'après la question précédente, N commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ est donc bien une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.C - Diagonalisation de J

16. On a

$$\chi_J(X) = \det(XI_n - J) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & X & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

(dvlpt par rapport à la dernière colonne)

$$= X \times X^{n-1} + (-1)^{n+2} \times (-1)^{n-1} \quad \text{(déterminant de matrices triangulaires)}$$

$$= X^n + (-1)^{2n+1} = X^n - 1.$$

17. Par suite, χ_J est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (ses racines sont les racines n-ème de l'unité), donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
18. Pour $n = 2$, $\chi_J = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Si $n \geq 3$, χ_J n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
19. D'après la question 17, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{e^{2ik\pi/n},\ k \in [[0, n-1]]\} = \{\omega^k, k \in [[0, n-1]]\}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Pour tout $k \in [[0, n-1]]$,

$$J \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{nk} \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k.

Par suite, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset E_{\omega^k}(J)$, et, comme ω^k est une valeur propre simple, on a $\dim E_{\omega^k}(J) = 1 = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
donc, comme on a une inclusion et l'égalité des dimensions, on a :

$$E_{\omega^k}(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

II.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. La preuve faite en question 15 avec $\mathbb{K}$ au lieu de $\mathbb{R}$ permet de conclure directement ici que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre (commutative) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
21. Comme J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $P^{-1}JP = D$.
On peut même particulariser P et D à l'aide de la question 19, mais une telle précision ne servira à rien dans la suite de cette preuve.

Alors, par récurrence immédiate, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{-1}J^kP = D^k$. Puis, pour tout $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,

$$P^{-1}MP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right)P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1}J^kP = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k,$$

qui est diagonale come combinaison linéaire de matrices diagonales.
$\mathcal{A}$ est donc une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

22. En choisissant bien la matrice P dans la question précédente, on a $D = \operatorname{diag}((\omega^i)_{i=0..n-1})$, donc

$$\begin{aligned} P^{-1}J(a_0,\dots,a_{n-1})P &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \operatorname{diag}((\omega^{ki})_{i=0..n-1}) \\ &= \operatorname{diag}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{ki}\right)_{i=0..n-1}\right), \end{aligned}$$

donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(J(a_0,\dots,a_{n-1})) = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{ki}, \quad i \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

23. • Pour tout $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle M,N\rangle = \operatorname{tr}(M^TN) = \operatorname{tr}((M^TN)^T) = \operatorname{tr}(N^TM) = \langle N,M\rangle$, donc $\langle , \rangle$ est symétrique.
• Pour tout $(M,N,P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda M + N, P\rangle &= \operatorname{tr}((\lambda M + N)^TP) = \operatorname{tr}(\lambda M^TP + N^TP) \quad \text{(linéarité de la transposition)} \\ &= \lambda\operatorname{tr}(M^TP) + \operatorname{tr}(N^TP) \quad \text{(linéarité de la trace)} \\ &= \lambda\langle M,P\rangle + \langle N,P\rangle, \end{aligned}$$

donc $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche.
• $\langle , \rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(M^TM)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n}(M^T)_{i,k}(M)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2,$$

donc

$$\langle M,M\rangle = \operatorname{tr}(M^TM) = \sum_{i=1}^{n}(M^TM)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 = \sum_{1\le i,k\le n} m_{i,k}^2.$$

Par suite, il est clair que $\langle M,M\rangle \ge 0$ (comme somme de positifs) et on a

$$\langle M,M\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{1\le i,k\le n} m_{i,k}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2, m_{i,k} = 0 \Leftrightarrow M = 0_n.$$

$\langle , \rangle$ est donc bien défini positif.
• $\langle , \rangle$ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

24. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle .,.\rangle)$ est un espace euclidien, donc $\dim\mathcal{A} + \dim\mathcal{A}^\perp = \dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ie $d + r = n^2$.

25. Comme $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle .,.\rangle)$ est un espace euclidien, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$.
• Soit $M \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, $\langle M,N\rangle = 0$.
En particulier, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, comme $A_i \in \mathcal{A}^\perp$, on a $\langle A_i, M\rangle = 0$.
• Réciproquement, supposons que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $\langle A_i, M\rangle = 0$. Comme $(A_1,\dots,A_r)$ est une base de $\mathcal{A}^\perp$, pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, il existe $(a_1,\dots,a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $N = \sum_{i=1}^{n} a_iA_i$.
Alors, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle N,M\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\langle A_i, M\rangle}_{=0} = 0,$$

donc $M \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp = \mathcal{A}$.
• On a donc bien, par double-implication, l'équivalence souhaitée.

26. Soit $N \in \mathcal{A}$ et $i \in [\![1,r]\!]$.
Pour tout $M \in \mathcal{A}$,

$$\left\langle M, N^TA_i\right\rangle = \operatorname{tr}(M^TN^TA_i) = \operatorname{tr}((NM)^TA_i) = \langle NM, A_i\rangle = 0$$

d'après la question précédente avec $NM \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par produit.
On a donc bien $N^TA_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B - Conclusion

27. • L'application transposition $Trans : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et $Trans^{-1} = Trans$), donc $\mathcal{A}^T = Trans(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$ comme image d'un sous-espace vectoriel par un isomorphisme.
   • Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{A}^T)^2$, il existe $(M, N) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A = M^T$ et $B = N^T$.
   Alors $AB = M^T N^T = (NM)^T \in \mathcal{A}^T$ car $\mathcal{A}$ est stable par produit, donc $NM \in \mathcal{A}$.
   $\mathcal{A}^T$ est donc stable par produit, donc c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
28. Pour tout $M^T \in \mathcal{A}^\perp$, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $M^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$ d'après la question 26, donc, comme $(A_1, \ldots, A_r)$ est une base de $\mathcal{A}^\perp$, il existe $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $M^T A_i = \sum\limits_{k=1}^{r} a_k A_k$ et, par suite,
$$M^T A_i X = \sum_{k=1}^{n} a_k A_k X \in \operatorname{Vect}(A_1 X, \ldots, A_r X).$$
   Par suite, $M^T(F) = \operatorname{Vect}(M^T A_1 X, \ldots, M^T A_r X) \subset F$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de F, donc F est stable par M^T. cqfd.
29. • Si $d > n^2 - n + 1$, alors $r = n^2 - d < n - 1$. Soit $X \notin \operatorname{Ker} A_1$ (possible car $A_1 \neq 0$ car la famille $(A_1, \ldots, A_r)$ est libre).
   Soit $F = \operatorname{Vect}(A_1 X, \ldots, A_r X)$. On a :
   – $\dim F \leq r < n$, donc $F \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
   – $\dim F \geq 1$, car $A_1 X \neq 0$, donc $F \neq \{0\}$.
   De plus, en identifiant les matrices et leur application linéaire canoniquement associée, on a
$$\mathcal{A}^T \subset \mathcal{A}_F, \quad \text{où cette notation a été introduite dans la partie I.B.}$$
   On a donc
$$\begin{aligned} d = \dim \mathcal{A} &= \dim \mathcal{A}^T \quad \text{(d'après la question 27)} \\ &\leq \dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2 \quad \text{(d'après la question 5)} \\ &\leq \max_{1 \leq p \leq n-1} n^2 - pn + p^2 = n^2 - n + 1, \quad \text{ce qui est contraire à l'hypothèse sur } d. \end{aligned}$$
   D'où, par l'absurde, $d \leq n^2 - n + 1$.
   • Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. En posant $F = \operatorname{Vect}(X)$ de dimension 1, $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) : u(F) \subset F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - n + 1$ d'après la question 5.
   Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, d'après les remarques préliminaires, $\{Mat_{\mathcal{B}}(u), u \in \mathcal{A}_F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension, donc de dimension $n^2 - n + 1$.
   Le majorant $n^2 - n + 1$ de la dimension d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donc atteint, donc $n^2 - n + 1$ est la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

30. Si E est de dimension 1, alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $1^2 = 1$, donc $\mathcal{A} = \{0\}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.
   Comme Id_E n'est pas nilpotente, $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$, donc $\mathcal{A} = \{0\}$, et $\mathcal{A}$ est bien trigonalisable.
   On peut aussi remarquer que la matrice de n'importe quel endomorphisme de E est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, donc automatiquement triangulaire.
31. Comme Id_E n'est pas nilpotente, $\mathrm{Id}_E \notin \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$, La contraposée du théorème de Burnside assure alors l'existence d'un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.
32. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de V complétée en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.
   Alors, pour tout $u \in \mathcal{A}$, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $u(e_j) \in F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$, donc il existe $(a_{i,j})_{i \in [\![1,r]\!]}$ tel que $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i,j} e_j$.
   Alors on a
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_r), u(e_{r+1}), \ldots, u(e_n)) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix},$$
   où $A(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.
33. • Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.
   Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}$ (HR_p)
   Initialisation : Pour $p = 0$, $M^0 = I_p = \begin{pmatrix} A^0 & B_0 \\ 0 & D^0 \end{pmatrix}$ en posant $B_0 = 0_{r,s}$.
   Pour $p = 1$, $B_1 = B$ convient.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons HR_p vérifiée.
Alors
$$M^{p+1} = M^p M \underset{HR_p}{=} \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & A^p B + B_p D \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & B_{p+1} \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix}$$
en posant $B_{p+1} = A^p B + B_p D$. On a bien HR_{p+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}$.

• Soit $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$. Alors il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
Alors, d'après le premier point, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$Mat_{\mathcal{B}}(u^p) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}.$$
Or $u \in \mathcal{A}$, donc u est nilpotent, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u^{p_0} = 0$ et, par suite, $0 = \begin{pmatrix} A^{p_0} & B_{p_0} \\ 0 & D^{p_0} \end{pmatrix}$, donc $A^{p_0} = 0$, donc A est nilpotente.
• Pour tout $(u, v) \in \mathcal{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$Mat_{\mathcal{B}}(\lambda u + v) = \lambda Mat_{\mathcal{B}}(u) + Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda A(u) + A(v) & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$
donc $A(\lambda u + v) = \lambda A(u) + A(v)$.
$\varphi : u \in \mathcal{A} \mapsto A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ est donc une application linéaire, donc $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\} = \operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.
• Pour tout $(A, B) \in (\{A(u) | u \in \mathcal{A}\})^2$, il existe u et $v \in \mathcal{A}$ tels que $A = A(u)$ et $B = A(v)$, c'est-à-dire $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.
Alors $u \circ v \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et
$$Mat_{\mathcal{B}}(u \circ v) = Mat_{\mathcal{B}}(u) \times Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} AB & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$
donc $AB = A(u \circ v) \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$.
$\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est donc stable par produit.
• $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.
• On montre de même que $\{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

34. • $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nilpotents, donc, comme $r \leq n-1$, $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est trigonalisable (version matricielle de l'hypothèse de récurrence), ie il existe $P \in GL_r(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$, $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
• De même, il existe $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telle que pour tout $D \in \{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$, $P^{-1}DP$ soit triangulaire supérieure.
• Posons alors $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Comme $\det(R) = \det(P)\det(Q) \neq 0$, R est inversible.
En voyant R comme une matrice de changement de base, et en posant donc $\mathcal{C}$ base de E telle que $R = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, on a, pour tout $u \in \mathcal{A}$,
$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{C}}(u) = R^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(u) R &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u)P & B(u)Q \\ 0 & D(u)Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & P^{-1}B(u)Q \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$
et cette dernière matrice est triangulaire supérieure car $P^{-1}A(u)P$ et $Q^{-1}D(u)Q$ le sont. *On peut alors conclure la propriété annoncée par récurrence...*

35. Dans cette base $\mathcal{C}$, les valeurs propres de u sont les éléments diagonaux de la matrice associée.
Or, comme il existe p tel que $u^p = 0$, si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors
$$u^p(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^{p-1}(\lambda x) = \lambda u^{p-1}(x) = \ldots = \lambda^p x,$$
donc, comme $u^p = 0$, on a $\lambda^p x = 0$, donc, comme $x \neq 0$, on a $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.
Par suite, les éléments diagonaux de la matrice associée à u dans la base $\mathcal{C}$ sont nuls, donc cette matrice triangulaire est dans $T_n^+(\mathbb{C})$.

V. Le théorème de Burnside

V.A - Recherche d'un élément de rang 1

Comme $\mathcal{A}$ est irréductible, $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$, car tous les sous-espaces vectoriels de E seraient alors stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

36. • Soient x un élément non nul de E.
$F = \{u(x) | u \in \mathcal{A}\}$ est un sous-espace vectoriel car $\mathcal{A}$ en est un. De plus, pour tout $y \in F$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$. Alors, pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v(y) = \underbrace{v \circ u}_{\in \mathcal{A}}(x) \in \{f(x) | f \in \mathcal{A}\} = F$. F est donc stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, donc $F = \{0\}$ ou $F = E$.
• Si $F = \{0\}$, alors, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $u(x) = 0$, donc $\mathrm{Vect}\,(x)$ est stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, ce qui est exclu car $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et car $\mathrm{Vect}\,(x) \neq \{0\}$ (car $x \neq 0$).
• On a donc $F = E$, et, par suite, pour tout $y \in E$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

37. • Soit x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre (x et y existent car $\mathrm{rg}(v) \geq 2$). D'après la question précédente, comme $v(x) \neq 0$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(v(x)) = u \circ v(x)$.
• Considérons alors $\varphi : z \in \mathrm{Im}\,(v) \mapsto v \circ u(z) \in \mathrm{Im}\,(v)$.
φ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(v)$, $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension au moins 1, donc φ admet au moins une valeur propre λ. (car son polynôme caractéristique, de degré au moins 1, admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$). Par suite, $\varphi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,(v)}$ n'est pas injective, donc non surjective (endomorphisme en dimension finie), donc $\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(\mathrm{Im}\,(v)) - 1 = \mathrm{rg}(v) - 1$.
• Soit alors $\psi = v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{L}(E)$.
Comme $\psi = \varphi \circ v$, $\mathrm{rg}(\psi) \leq \min(\mathrm{rg}(\varphi), \mathrm{rg}(v)) \leq \mathrm{rg}(v) - 1$ et, comme $\psi(x) = v \circ u \circ v(x) - \lambda v(x) = v((u \circ v)(x)) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$ (car $(v(x), v(y))$ est une famille libre), donc $\mathrm{rg}(\psi) \geq 1$.
On a donc bien $0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v)$.

38. Supposons qu'il n'existe pas d'élément de $\mathcal{A}$ de rang 1.
Posons alors $r = \min\{\mathrm{rg}(u), u \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}(E)}\}\}$, qui existe comme minimum d'un ensemble fini non vide (car $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$).
Soit alors $v \in E$ tel que $\mathrm{rg}(v) = r$. Alors, en prenant u comme dans la question précédente, $v \circ u \circ v \in \mathcal{A}$ comme composé d'éléments de $\mathcal{A}$, et $v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Or $0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v) = r$, ce qui est exclu.
D'où, par l'absurde, il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rg}(v) = 1$.

V.B - Conclusion

39. Comme u_0 est de rang 1, et $u_0(\varepsilon_k) = 0$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $u_0(\varepsilon_1) \neq 0$.
D'où, d'après la question 36, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(u_0(\varepsilon_1)) = \varepsilon_i$. Alors $u_i = v_i \circ u \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par composition et

$$u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!], u_i(\varepsilon_k) = v_i(u_0(\varepsilon_k)) = v_i(0) = 0,$$

donc $\dim \mathrm{Im}\,(u_i) = \dim \mathrm{Vect}\,(u_i(\varepsilon_k)_{k \in [\![1,n]\!]}) = \dim \mathrm{Vect}\,(u_i(\varepsilon_1)) = 1$, donc u_i est de rang 1 et $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$.

40. On construit maintenant des endomorphismes $u_{i,j}$ dans $\mathcal{A}$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont les $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On a déjà construit $u_{i,1} = u_i$ dans la question précédente.
– Notons $(V_1, \ldots, V_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et

$$G = \left\{x \in E \ : \ \forall u \in \mathcal{A}, \ V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(x) = 0\right\}.$$

– G est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, si $x \in G$, alors, pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v(x) \in G$ car pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(v(x)) = V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(v) Mat_{\mathcal{B}}(x) = V_1^T Mat_{\mathcal{B}} \underbrace{(u \circ v)}_{\in \mathcal{A}} Mat_{\mathcal{B}}(x) \underset{\text{car } x \in G}{=} 0.$$

Par suite, comme $\mathcal{A}$ est supposée irréductible, on a $G = \{0\}$ ou $G = E$.
Supposons $G = E$. Soit alors $\varphi : x \in E \mapsto V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{C}$. φ est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, donc $K = \mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in E : V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
De plus, pour tout $x \in K$, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $u(x) \in K$ car

$$V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u(x)) = V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(x) = 0$$

car $x \in E = G$.
K est donc un sous-espace vectoriel non tirvial de E stable par $\mathcal{A}$, ce qui est contraire au caractère irréductible de $\mathcal{A}$.
On a donc $G = \{0\}$.

- Soit à présent $H = \left\{ (Mat_{\mathcal{B}}(u))^T V_1,\ u \in \mathcal{A} \right\}$.
  H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
  Si $H \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors on note $p = \dim H < n$ et $H = \operatorname{Vect}(W_1, \dots, W_p)$.
  On choisit $X \neq 0$ dans l'intersection d'hyperplans
  $$\operatorname{Ker}(W_1^T) \cap \operatorname{Ker}(W_2^T) \cap \dots \cap \operatorname{Ker}(W_p^T)$$
  qui est de dimension $\geq n - p > 0$.
  Alors, en prenant $x \in E$ tel que $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = X$, on a $x \in G$ et $x \neq 0$, ce qui est exclu.
  D'où, par l'absurde, $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
- Comme $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $(Mat_{\mathcal{B}}(w_j))^T V_1 = V_j$.
  On a alors $E_{i,j} = V_i V_j^T = V_i V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = E_{i,1} Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,1} w_j)$, où $u_{i,1} w_j \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par composition.
- Posons alors, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $u_{i,j} = u_{i,1} w_j$.
  $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ car $(Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,j}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = (E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
  Par suite, $\mathcal{L}(E) = \operatorname{Vect}((u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}) \subset \mathcal{A}$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{A}$.
  L'inclusion réciproque étant évidente, on a bien l'égalité : $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

Centrale-Supélec 2019[1]
PC - Mathématiques 1

I Exemples de sous-algèbres

I.A Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. En remarquant que $T_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(E_{ij})_{i\leqslant j}$ et $T_n^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(E_{ij})_{i<j}$ on montre immédiatement que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit de deux matrices triangulaires étant encore triangulaire, $T_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. De plus, si la diagonale de l'une des deux matrices triangulaires est nulle, la diagonale de la matrice produit le sera aussi. Donc $T_n^+(\mathbb{K})$ aussi est stable par produit.

$$\boxed{\text{Les ensembles } T_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2. L'ensemble $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car il n'est pas stable par produit. En effet, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques, mais leur produit $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. L'ensemble $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre car $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } S_2(\mathbb{K}) \text{ et } A_2(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

3. Reprenons les contre-exemples de la question précédente. Les matrices $A' = \mathrm{Diag}(A, O_{k-2})$ et $B' = \mathrm{Diag}(B, O_{k-2})$ sont symétriques de taille k mais leur produit $A'B' = \mathrm{Diag}(AB, O_{k-2})$ ne l'est pas. La matrice $C' = \mathrm{Diag}(C, O_{k-2})$ est antisymétrique de taille k mais $C'^2 = \mathrm{Diag}(C^2, O_{n-2})$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } S_k(\mathbb{K}) \text{ et } A_k(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_k(\mathbb{K}).}$$

I.B Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

4. L'ensemble $\mathcal{A}_F$ n'est pas vide car l'endomorphisme nul 0_E stabilise F. Soit $u, v \in \mathcal{A}_F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in F$, $(u + \lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) \in F$. Donc $u + \lambda v$ stabilise F et $\mathcal{A}_F$ est stable par combinaison linéaire ce qui fait de $\mathcal{A}_F$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Soient $u, v \in \mathcal{A}_F$. Alors $(u \circ v)(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$ donc $u \circ v$ stabilise F et $\mathcal{A}_F$ est stable par composition.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$$

5. Soit G un supplémentaire de F dans E. Dans une base adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$ la matrice d'un endomorphisme stabilisant F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. Réciproquement une telle matrice est la matrice d'un endomorphisme stabilisant F.

Donc $\mathcal{A}_F$ est isomorphe à $\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} : A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$ qui est de dimension $p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = (n-p+p)^2 - p(n-p)$.

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_F = n^2 - np + p^2.}$$

1. Vous pouvez envoyez vos remarques ainsi que les irréductibles erreurs et fautes de frappes qui se seront glissées dans ce document à l'adresse suivante pierre-amaury.monard@laposte.net. L'auteur vous en sera reconnaissant.

6. Pour tout $p \in \{1, \ldots, p-1\}$, $n^2 - np + p^2 = (p - \frac{n}{2})^2 + \frac{3n^2}{4}$ donc la dimension de $\mathcal{A}_F$ est maximale quand $\left|p - \frac{n}{2}\right|$ est maximale *i.e* quand $p = 1$ ou $p = n-1$ auxquels cas elle vaut $n^2 - n + 1$.

$$\boxed{\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - np + p^2) = n^2 - n + 1.}$$

I.C exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

7. Posons $K := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\Gamma(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(I_2, K)$ ce qui montre que $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. De plus, $I_2^2 = I_2$, $I_2 K = K I_2 = K$ et $K^2 = -I_2$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit puisque qu'un produit de vecteurs d'une famille génératrice reste dans $\Gamma(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

8. Si $\Gamma(\mathbb{R})$ était diagonalisable tous ses éléments serait diagonalisable. En en particulier, $K \in \Gamma(\mathbb{R})$ serait diagonalisable. Son polynôme caractéristique $\chi_K = X^2 + 1$ serait alors scindé sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est manifestement pas le cas.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

9. Le polynôme $\chi_K = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_K annule K. Donc K est annulé par un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ *i.e* est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

Soit $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $K = P\,\mathrm{Diag}(i, -i)P^{-1}$. Soit $M \in \Gamma(\mathbb{C})$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $M = aI_2 + bK$. Alors $M = P(aI_2 + b\,\mathrm{Diag}(i, -i))P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(a + ib, a - ib)P^{-1}$. Vrai pour tout $M \in \Gamma(\mathbb{C})$ donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

Remarque : On aurait aussi pu montrer que tous les éléments de $\Gamma(\mathbb{C})$ étaient diagonalisables -via leur polynôme caractéristique par exemple- puis que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une algèbre commutative ce qui prouverait que les éléments de $\Gamma(\mathbb{C})$ sont co-diagonalisables. L'esprit du sujet voulait cependant que nous passions par la diagonalisabilité de K.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A Calcul des puissances de J

10. Sans difficulté. La matrice J envoie e_i sur e_{i+1} et la matrice J^2 e_i sur e_{i+2} où les indices sont pris modulo n.

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

11. La matrice J^k est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme qui envoie e_i sur e_{i+k} toujours en prenant les indices modulo n. En particulier, J^n est la matrice identité.

$$\boxed{J^n = I_n.\ J^k \text{ n'a que des 0 sauf sur la } k\text{-ième sous-diagonale et la } n-k\text{-ième sur-diagonale où il y a des 1.}}$$

12. Sans difficulté.

$$\boxed{J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_0^{n-1} a_k J^k.}$$

II.B Une base de $\mathcal{A}$

13. D'après la question précédente, $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(J^0, \ldots, J^{n-1})$ donc la famille $(I_n, \ldots, J^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{A}$ (et $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel !). Montrons qu'elle est libre. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_0^{n-1} a_k J^k = 0$ *i.e* $J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = 0$. Étant donné la définition de $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ on a $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Donc la famille $(J^0, \ldots, J^{n-1})$ est libre et c'est une base de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{(J^0, \ldots, J^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{A}.}$$

Remarque : En fait, $\mathcal{A} = \mathbb{R}[J]$ *où* $\mathbb{R}[J] = \{P(J) : P \in \mathbb{R}[X]\}$ *est l'ensemble des polynômes en* J. *L'application* $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $\varphi(P) = P(J)$ *est un morphisme d'algèbre. De plus* $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[J]$ *ce qui montre directement que* $\mathcal{A}$ *est une algèbre.*

14. Si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ alors en particulier M commute avec J. Réciproquement, si M commute avec J alors M commute avec $J^0, \ldots, J^{n-1}$. Définissons le centre de M comme l'ensemble $\mathcal{C}(M) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$. En remarquant qu'il s'agit du noyau de l'application linéaire $A \mapsto AM - MA$ on prouve que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{C}(M)$ contient $\mathrm{Vect}(J^0, \ldots, J^{n-1}) = \mathcal{A}$ donc M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Une matrice } M \text{ commute avec } J \text{ si et seulement si elle commute avec tous les éléments de } \mathcal{A}.}$$

15. On sait déjà que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $M = J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et $N = J(b_0, \ldots, b_{n-1})$. Posons $P = \sum_0^{n-1} a_k X^k$ et $Q = \sum_0^{n-1} b_k X^k$ de sorte que $M = P(J)$ et $N = Q(J)$. Soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ le reste de la division euclidienne de PQ par $X^n - 1$. Il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $PQ = T(X^n - 1) + R$. Alors $PQ(J) = R(J)$ car $J^n - I_n = 0$. Alors $MN = PQ(J) = R(J) = J(c_0, \ldots, c_{n-1})$ où l'on a noté $R = \sum_0^{n-1} c_k X^k$. Donc $MN \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par produit et c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $MN = PQ(J) = QP(J) = NM$ donc les éléments de $\mathcal{A}$ commutent entre eux.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Remarque : Puisque φ *est un morphisme d'algèbre et que* $\mathbb{R}[X]$ *est une algèbre commutative, l'algèbre* $\mathbb{R}[J]$ *est aussi commutative. En règle général deux polynômes en une même matrice/endomorphisme commutent toujours (pour peu que l'anneau de base soit commutatif).*

II.C Diagonalisation de J

16. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_J annule J autrement dit π_J divise χ_J où π_J désigne le polynôme minimal de J. C'est le polynôme unitaire de plus petit degrés qui annule J. On a donc que $\deg \pi_J \leqslant n$. Si π_J est de degré n alors $\pi_J = \chi_J$. Le polynôme $X^n - 1$ annule J, est de degré n et est unitaire. Par ailleurs puisque la famille $(J^0, \ldots, J^{n-1})$ est libre, aucun polynôme de degré inférieur à $n - 1$ ne peut annuler J. Donc $\deg \pi_J \geqslant n$ et $\deg \pi_J = n$. Donc $\pi_J = X^n - 1$. D'après ce qui vient d'être dit : $\chi_J = X^n - 1$.

Nous pouvons également traiter cette question sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ni la notion de polynôme minimal. Par définition, $\chi_J = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}$. Développons par rapport à la première colonne : $\chi_J = X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1} = X^n + (-1)^n.(-1).(-1)^{n-2}$. La dernière égalité est obtenue en développant le deuxième déterminant par rapport à la première ligne.

$$\boxed{\chi_J = X^n - 1.}$$

17. Dans $\mathbb{C}$, $X^n - 1 = \prod_0^{n-1}(X - \omega^k)$ où $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Donc J est annulé par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C}).}$$

18. Pour $n = 2$, le polynôme caractéristique de J est $X^2 - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $n \geqslant 3$ le polynôme minimal de J est $X^n - 1$ qui n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc aucun polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ n'annule J et J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{J \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sauf si } n = 2.}$$

19. Le spectre de J est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \left\{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\right\}$ où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Il y a n valeurs propres donc elles sont toutes de multiplicité (géométrique) 1 : $\dim E_{\omega^k}(J) = 1$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Posons $X_k := \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}$. Alors $JX_k = \begin{pmatrix} \omega^{-k(n-1)} \\ 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-2)} \end{pmatrix} = \omega^k X_k$. Donc X_k est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k et (X_k) est une base de $E_{\omega^k}(J)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \left\{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\right\} \text{ et } E_{\omega^k}(J) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}.}$$

II.D Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire **complexe**. Par exemple, $iJ \notin \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $iJ \notin \mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Non, } \mathcal{A} \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

21. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PJP^{-1} = \mathrm{Diag}(1, \ldots, \omega^{n-1})$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A = Q(J)$. Alors $PAP^{-1} = PQ(J)P^{-1} = Q(PJP^{-1}) = Q(\mathrm{Diag}(1, \ldots, \omega^{n-1})) = \mathrm{Diag}(Q(1), \ldots, Q(\omega^{n-1}))$ et la matrice PAP^{-1} est diagonale.

$$\boxed{\text{Pour tout } A \in \mathcal{A},\ PAP^{-1} \text{ est diagonale.}}$$

L'égalité $PQ(J)P^{-1}$ vient du fait que $PJ^kP^{-1} = (PJP^{-1})^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

22. D'après la question précédente, la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = Q(J)$ est semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(Q(1), \ldots, Q(\omega^{n-1}))$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(Q(J)) = \{Q(1), \ldots, Q(\omega^{n-1})\}.}$$

III Sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

III.A Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

23.
- Notons $b : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $b(A,B) = (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
- Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixé. Alors l'application partielle $b(A, \cdot) : M \mapsto (M|B)$ est la composé de $M \mapsto {}^tAM$ et de la $\mathrm{Tr} : M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ qui sont linéaires. Donc b est linéaire à droite.
- La trace étant invariante par transposition : $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA)$ donc $(A|B) = (B|A)$ et b est symétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $b(A,A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_1^n ({}^tAA)_{ii} = \sum_1^n \sum_1^n a_{ji}^2 \geqslant 0$ donc b est positive.
- Si $b(A,A) = 0$ alors $\sum_{i,j} a_{ji}^2 = 0$ donc $a_{ji} = 0$ pour tout $i,j = 1, \ldots, n$ *i.e* $A = 0$. Donc b est définie positive.

$$\boxed{b : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^tB) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

24. En dimension finie, un sous-espace vectoriel et son orthogonal sont supplémentaires. Ici, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{d + r = n^2.}$$

25. Pour F un sous-espace vectoriel de E un espace euclidien, $x \in \mathbb{F}^\perp$ si et seulement si x est orthogonal à n'importe quelle famille génératrice de F. En dimension finie, $F = F^{\perp\perp}$. Donc $M \in \mathcal{A}$ si et seulement si $M \in \mathcal{A}^{\perp\perp}$ si et seulement si M est orthogonal à la famille $(A_1, \ldots, A_r)$ qui est bien génératrice de $\mathcal{A}^\perp$.

$$\boxed{M \in \mathcal{A} \text{ si et seulement si } (A_k|M) = 0 \text{ pour tout } k = 1, \ldots, r.}$$

26. Soit $i,j \in [\![1,r]\!]$. Soit $M \in \mathcal{A}$. On a $(M|{}^tNA_i) = \mathrm{Tr}({}^tM{}^tNA_i) = (NM|A_i) = 0$ car $NM \in \mathcal{A}$. Vrai pour tout $M \in \mathcal{A}$:

$$\boxed{\text{Pour tout } i = 1, \ldots, r,\ {}^tNA_i \in \mathcal{A}^\perp.}$$

27. L'application ${}^t : A \mapsto {}^tA$ est linéaire donc ${}^t\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image d'un sous-espace vectoriel par une fonction linéaire. De plus, si $A, B \in \mathcal{A}$, ${}^tA{}^tB = {}^t(BA) \in {}^t\mathcal{A}$ et ${}^t\mathcal{A}$ est stable par produit.

$$\boxed{{}^t\mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

La transposée étant involutive, elle est bijective donc injective. La transposition réalise donc un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur ${}^t\mathcal{A}$ et $\dim \mathcal{A} = \dim({}^t\mathcal{A})$.

$$\boxed{\dim \mathcal{A} = \dim({}^t\mathcal{A}).}$$

28. Soit $N \in \mathcal{A}$. Montrons que F est stable par ${}^tN$. Soit $i \in [\![1,r]\!]$. Alors, ${}^tNA_i \in \mathcal{A}^\perp$ d'après la question 26. Donc il existe $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ des coefficients tels que ${}^tNA_i = \sum_1^r c_jA_j$. D'où ${}^tNA_iX = \sum_1^r c_jA_jX \in F$. Vrai pour tout $i = 1, \ldots, r$ donc F est stable par ${}^tN$. Vrai pour tout $N \in \mathcal{A}$ donc :

$$\boxed{F \text{ est stable par tous les endomorphismes de } {}^t\mathcal{A}.}$$

29. Notons p la dimension de F. Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a nécessairement $p \leqslant n$. Si $p = n$ alors $r \geqslant n$ et $d = n^2 - r \leqslant n^2 - n < n^2 - n + 1$ ce qui démontre le résultat.

    Si $p < n$. Alors, comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $r = n^2 - d > 0$ et donc $p \geqslant 1$ puisque $F \neq \{0\}$. D'où $1 \leqslant p \leqslant n-1$. D'après la question précédente, ${}^t\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_F$ où $\mathcal{A}_F$ a été introduit à la partie $I.B$. D'après la question 6, $\dim \mathcal{A}_F \leqslant n^2 - n + 1$ donc $\dim({}^t\mathcal{A}) \leqslant n^2 - n + 1$. D'après la question 27, $\dim({}^t\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} = d$. Dans ce cas aussi on a $d \leqslant n^2 - n + 1$.

$$\boxed{d \leqslant n^2 - n + 1.}$$

    Soit F une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - n + 1 < n^2$ d'après la partie $I.B$ et c'est donc une sous-algèbre stricte pour laquelle on a l'égalité $d = n^2 - n + 1$.

$$\boxed{\text{La dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est } n^2 - n + 1.}$$

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente

30. Si $n = 1$, les matrices nilpotentes sont les matrices nulles qui sont trigonalisables dans toute base.

$$\boxed{\text{Le résultat est vrai pour } n = 1.}$$

31. S'il n'existe aucun tel sous-espace vectoriel alors $\mathcal{A}$ est irréductible. Or E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ d'après le théorème de Burnside. En particulier, $\mathrm{id}_E \in \mathcal{A}$ mais id_E n'est pas nilpotent ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{Il existe un sous-espace vectoriel } V \text{ de } E \text{ distinct de } E \text{ et } \{0\} \text{ stable par les éléments de } \mathcal{A}.}$$

32. Soit W un supplémentaire de V dans V et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $V \oplus W = E$. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où A est de taille $r \times r$, B de taille $r \times s$ et D de taille $s \times s$.

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ telle que } \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ où } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C}) \text{ et } D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C}).}$$

33. Un calcul matriciel par blocs montre que $\begin{pmatrix} A(u+\lambda v) & B(u+\lambda v) \\ 0 & D(u+\lambda v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ 0 & D(v) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A(uv) & B(uv) \\ 0 & D(uv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u)A(v) & * \\ 0 & D(u)D(v) \end{pmatrix}$. Ceci montre que $\{A(u) : u \in \mathcal{A}\}$ est une partie non vide (car $\mathcal{A}$ est non vide) stable par combinaison linéaire et stable par produit. C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. De même pour $\{D(u) : u \in \mathcal{A}\}$.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \{A(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{D(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \text{ et } \mathcal{M}_s(\mathbb{C}).}$$

    Soit $u \in \mathcal{A}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u^N = 0_n$. Un calcul matriciel par blocs montre que $u^N = \begin{pmatrix} A(u)^N & * \\ 0 & D(u)^N \end{pmatrix}$. Donc $A(u)^N = 0_r$ et $D(u)^N = 0_s$.

$$\boxed{\text{Les éléments de } \{A(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{D(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ sont nilpotents.}}$$

34. Le sous-espace vectoriel V étant distinct de $\{0\}$ et de E, sa dimension r vérifie $1 \leqslant r \leqslant n-1$. De même pour s la dimension de W. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_r(\mathbb{C})$ et $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{A}$, les matrices $PA(u)P^{-1}$ et $QD(u)Q^{-1}$ sont triangulaires supérieures.
Posons $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Alors T est inversible d'inverse $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Alors $T \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) T^{-1} = \begin{pmatrix} PA(u)P^{-1} & * \\ 0 & QD(u)Q^{-1} \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbb{C})$. Donc $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

$$\boxed{\text{L'algèbre } \mathcal{A} \text{ est trigonalisable.}}$$

35. La matrice T est inversible. Elle envoie donc la base $\mathcal{B}$ sur une autre base $\mathcal{B}'$ de E. Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de u est $T \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} T^{-1} \in T_n^+(\mathbb{C})$.

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle les éléments de } \mathcal{A} \text{ sont triangulaires supérieures.}}$$

V.Le théorème de Burnside

V.A Recherche d'un élément de rang 1

36. Posons $F := \{u(x) : u \in \mathcal{A}\}$. Considérons le morphisme d'évaluation en x, $\operatorname{Eval}_x : \mathcal{A} \to E$ défini par $\operatorname{Eval}_x(u) := u(x)$. L'application Eval_x est linéaire et son image est exactement F ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E.
Montrons F est stable par $\mathcal{A}$. Soit $z \in F$. Il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $z = u(x)$. Soit $v \in \mathcal{A}$. Alors $v(z) = (v \circ u)(x) \in \mathcal{A}$. Vrai pour tout $z \in F$ et $v \in \mathcal{A}$, donc F est stable par $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est irréductible, $F = \{0\}$ ou $F = E$.
Si $F = \{0\}$ alors $u(x) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{A}$. Donc $x \in G := \cap_{u \in \mathcal{A}} \ker u$. Si $z \in G$ alors $v(z) = 0 \in G$ pour tout $v \in \mathcal{A}$ donc G est stable par $\mathcal{A}$. Donc $G = \{0\}$ ou $G = F$ par irréductibilité de $\mathcal{A}$. Or $x \in G$ est non nul donc $G \neq \{0\}$ et $G = E$. Donc $\ker(u) = E$ pour tout $u \in \mathcal{A}$ *i.e* $\mathcal{A} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Or $n \geqslant 2$, il existe donc H un sous-espace vectoriel de E strict non réduit à $\{0\}$. Alors H est stable par $\mathcal{A} = \{0\}$ ce qui contredit l'irréductibilité de $\mathcal{A}$.
Donc $F = E$ et $y ß F$. Il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.

$$\boxed{\text{Il existe } u \in \mathcal{A} \text{ tel que } u(x) = y.}$$

37. Notons r le rang de v. Puisque $r \geqslant 2$ il existe une famille libre à deux éléments de $\operatorname{Im}(v)$. Notons x et y leurs antécédents par v ; alors $v(x), v(y)$ est libre. Nécessairement, $v(x), v(y) \neq 0$. D'après la question précédente, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(v(x)) = y$.
On a $(v \circ u)(\operatorname{Im} v) \subset \operatorname{Im} v$ donc on peut considérer $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\operatorname{Im} v$. Tout endomorphisme admet au moins une valeur propre complexe en dimension finie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{f} - \lambda \operatorname{id}_{\operatorname{Im} v}$ soit non inversible. En particulier, $\operatorname{rg}(\tilde{f} - \lambda \operatorname{id}_{\operatorname{Im} v}) < r$. Posons $f := \tilde{f} \circ v$ qui est bien défini si l'on voit v comme un élément de $\mathcal{L}(E, \operatorname{Im} v)$. Alors $f = v \circ u \circ v - \lambda v$ et $\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg} \tilde{f} < \operatorname{rg} v$ d'après ce qui vient d'être dit. De plus, $f(x) = v(u \circ v(x)) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x)$ est non nul par liberté de $(v(x), v(y))$ donc $\operatorname{rg} \tilde{f} > 0$. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Il existe } u \in \mathcal{A} \text{ et } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } 0 < \operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v < \operatorname{rg} v.}$$

38. Rappelons que $\mathcal{A} \neq \{0\}$ car l'algèbre $\{0\}$ n'est pas irréductible dès que $n \geqslant 2$. Soit donc $v_0 \in \mathcal{A}$ non nul. Si $\operatorname{rg} v_0 = 1$ c'est terminé. Si $\operatorname{rg} v_0 \geqslant 2$ on construit alors $v_1 = v_0 \circ u \circ v_0 - \lambda v_0$ comme dans la question précédente. Alors v_1 est encore un élément de l'algèbre $\mathcal{A}$ et de plus, $1 \leqslant \operatorname{rg} v_1 \leqslant \operatorname{rg} v_0$. En itérant, on construit ainsi une suite d'éléments $v_0, v_1, v_2, \ldots$ de $\mathcal{A}$ de rangs strictement décroissants. Comme il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels, ce processus s'arrête à v_k de rang 1.

$$\boxed{\text{Il existe } v \in \mathcal{A} \text{ de rang } 1.}$$

V.B Conclusion

39. Posons $x = u_(\varepsilon_0)$. Puisque u_0 n'est pas l'endomorphisme nul, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(x) = \varepsilon_i$ d'après la question 36. On pose alors $u_i := v_i \circ u_0$. D'une part, $u_i \in \mathcal{A}$. D'autre part, le noyau de u_i contient $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ donc u_i est de rang 0 ou 1. De plus, $u_i(\epsilon_1) = v_i(x) = \varepsilon_i$. Donc u_i est de rang 1 et vérifie bien $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$.

$$\boxed{\text{Il existe } u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A} \text{ de rang 1 tels que } u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!].}$$

40. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. D'après la question 36, il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $w_j(\varepsilon_j) = \varepsilon_1$. Posons $f_{ij} = u_i \circ w_j$. Alors $f_{ij}(\varepsilon_j)\varepsilon_i$. De plus f_{ij} est de rang 1 donc $f_{ij}(\varepsilon_k) = 0$ si $k \neq j$. Donc la matrice de f_{ij} est la matrice élémentaire E_{ij}. Puisque $(E_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la famille $(f_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Donc l'algèbre $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est un } \mathbb{C}\text{-ev alors la seule sous-algèbre irréductible de } \mathcal{L}(E) \text{ est } \mathcal{L}(E).}$$

Remarque : Ce n'est plus vrai si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, l'existence du scalaire λ de la question 37 *vient du fait que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel il n'existe pas forcément de valeur propre.*

$* * *$ FIN $* * *$
