



TRAVAUX DIRIGÉS

Théorème de Gauss



Les différents exercices de ce recueil sont agencés selon la progression des différents paragraphes du cours. Le niveau de difficulté approximatif est mentionné pour chacun d'eux à travers un nombre d'étoiles (★), sauf pour les exercices type résolution de problème (♣♥♦). La résolution d'un exercice nécessite un temps de lecture, un temps de recherche et un temps de rédaction. Aucun de ces trois ne doit être négligé. Pour favoriser votre apprentissage, il est vivement recommandé de réaliser les phases de lecture et de recherche en amont de la séance, le minimum exigé étant un schéma de situation et les lois à mettre en œuvre qui devront apparaître en regard des énoncés.

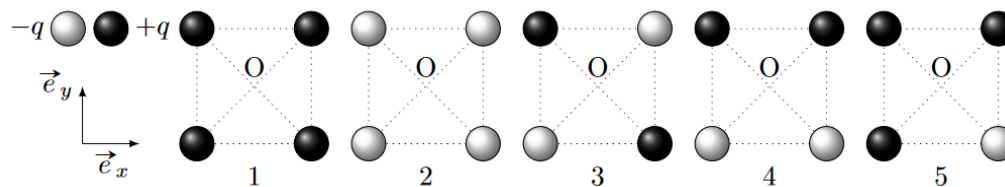
Linéaments

Sources de champ électrique et symétries

Exercice n°1 - Charges aux sommets d'un carré

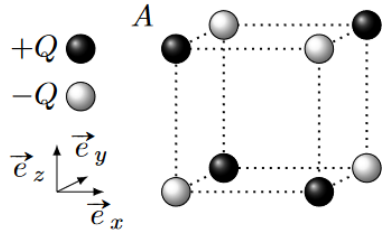
★ ☆ ☆

On considère les configurations de charges suivantes. La diagonale du carré vaut $2a$ et on supposera que le potentiel à l'infini est nul.



1. Exprimer puis développer le champ électrique au centre du carré pour chaque configuration.
2. Exprimer puis développer le potentiel électrique au centre du carré pour chaque configuration.
3. Déterminer l'énergie électrostatique totale contenue dans chaque configuration. Identifier la plus stable.

Exercice n°2 - Charges aux sommets d'un cube



Des charges sont disposées sur les huit sommets d'un cube de côté a , de manière à ce que deux charges occupant des sommets voisins soient de signe opposé, conformément à la figure ci-contre.

1. Exprimer la force électrostatique s'exerçant sur la charge située au point A .
2. En déduire le champ électrique dans lequel le point A baigne et commenter son orientation par rapport aux symétries du système de charges.

Exercice n°3 - Cartographie de champs électriques



Pour chacune des distributions de charge suivantes, tracer qualitativement les lignes de champ et les équipotentiellles et commenter l'allure à faible et grande distance de la distribution.

1. Deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$, séparées d'une distance a .
2. Deux charges q séparées d'une distance a .
3. Trois charges ponctuelles alignées sur l'axe (Ox) : une charge négative $-2q$ placée à l'origine O et deux charges positives q placées en A_1 d'abscisse $x = +d$ et A_2 d'abscisse $x = -d$. Soit P un point repéré par sa distance r à O et par l'angle θ entre $\vec{OP}$ et l'axe (Ox) .

Exercice n°4 - Calculs de flux



On souhaite calculer le flux du champ créé par une charge ponctuelle au travers d'un carré de côté a , la charge q étant placée à une distance $a/2$ du centre du carré perpendiculairement à sa surface.

1. Exprimer le flux électrique Φ recherché.
2. Calculer Φ en développant directement l'intégrale.
3. Calculer Φ en appliquant le théorème de Gauss à travers un cube côté a , la charge q étant placé au centre du cube.

Exercice n°5 - Cylindre infini uniformément chargé



On considère un cylindre de rayon R et de longueur infinie uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charge ρ .

1. Déterminer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'extérieur du cylindre.
2. Déterminer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'intérieur du cylindre.
3. Représenter graphiquement la valeur du champ électrique en fonction de la distance à l'axe du cylindre.
4. Déterminer la distribution de charge linéique uniforme λ disposée le long de l'axe du cylindre qui générerait un champ électrostatique équivalent au champ extérieur.

Exercice n°6 - Boule uniformément chargée



On considère une boule de rayon R uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge ρ .

1. Exprimer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'extérieur de la boule.
2. Exprimer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'intérieur de la boule.
3. Représenter graphiquement la valeur du champ électrique en fonction de la distance au centre de la boule.
4. Déterminer la charge ponctuelle Q qui, disposée au centre, générerait un champ équivalent à l'extérieur.

Exercice n°7 - Sphère uniformément chargée



On considère une sphère de rayon R uniformément chargée en surface de densité surfacique de charge σ .

1. Exprimer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'extérieur de la sphère.
2. Exprimer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'intérieur de la sphère.
3. Représenter graphiquement la valeur du champ électrique en fonction de la distance au centre de la sphère.

Exercice n°8 - Coquille sphérique uniformément chargée



On considère une coquille sphérique contenue entre deux sphères de rayon R_1 et R_2 tels que $R_2 > R_1$. Cette coquille est uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge ρ .

1. Exprimer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'extérieur de la coquille sphérique.
2. Exprimer le champ électrostatique généré par la distribution de charge à l'intérieur de la coquille sphérique.
3. Représenter graphiquement la valeur du champ électrique en fonction de la distance au centre de la sphère.

Exercice n°9 - Le condensateur plan



Un condensateur plan peut être modélisé par deux plans infinis uniformément chargés, de cote respectives $z_{\max} = e/2$ et $z_{\min} = -e/2$ et de densité surfacique de charge respectives $+\sigma$ et $-\sigma$. On appelle $e = z_{\max} - z_{\min}$ l'épaisseur du condensateur.

1. Exprimer le champ électrostatique généré entre et hors des armatures en appliquant le principe de superposition après détermination du champ électrostatique généré par un unique plan infini chargé.
2. Exprimer le champ électrostatique généré entre et hors des armatures en appliquant directement le théorème de Gauss au système entier de deux plans infinis.

On admet qu'un condensateur réel de surface S génère le même champ que le modèle idéal précédent.

3. Exprimer la différence de potentiel U entre les armatures du condensateur. En déduire l'expression de sa capacité C .

Exercice n°10 - Le condensateur cylindrique



Un condensateur cylindrique peut être modélisé par deux cylindres coaxiaux infinis uniformément chargés, de rayons respectifs R_{int} et R_{ext} et de densité surfacique uniforme de charge respectives $+\sigma$ et $-\sigma$. On appelle $e = R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}$ l'épaisseur du condensateur.

1. Exprimer le champ électrostatique généré entre et hors des armatures en appliquant le principe de superposition après détermination du champ électrostatique généré par un unique cylindre infini chargé.
2. Exprimer le champ électrostatique créé par le condensateur entre ses armatures puis à l'extérieur en appliquant le directement le théorème de Gauss au système entier de deux cylindres infinis.

On admet qu'un condensateur cylindrique réel de hauteur H génère le même champ que le modèle idéal précédent.

3. Exprimer la différence de potentiel U entre les armatures du condensateur. En déduire l'expression de sa capacité C .

Problème ouvert - Anomalie gravitationnelle



Au cours d'une mission d'exploration pour la Fédération, le capitaine Kirk et son équipage découvrent une planète sphérique homogène dont la seule irrégularité dans la structure interne est l'existence d'une grotte souterraine parfaitement sphérique et vide dont le centre ne coïncide pas avec celui de la planète. Le capitaine demande au lieutenant Spok, scientifique vulcain de génie, d'étudier cette anomalie afin de pouvoir y téléporter une équipe d'exploration en toute sécurité.



► Déterminer le champ gravitationnel régnant au sein de la grotte.

Exercice n°11 - Structure interne de la Terre



La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R_T = 6,38 \times 10^3$ km et de masse $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg.

— Première modélisation

On suppose ici que la masse de la Terre est uniformément répartie dans tout son volume.

1. Déterminer le champ gravitationnel de la Terre $\vec{G}_T$ en tout point de l'espace.
2. Représenter graphiquement $\|\vec{G}_T\|$ en fonction de la distance au centre O .
3. Calculer G_0 la valeur du champ à la surface de la Terre.

— Seconde modélisation

L'étude des ondes sismiques suggère que le modèle précédent n'est pas valable, le champ gravitationnel ayant plutôt l'allure suivante : nul au centre ; croissance linéaire du centre O jusqu'à un rayon $R_1 = 3,50 \times 10^3$ km où le champ vaut G_0 ; valeur constante de R_1 à R_T , décroissance en inverse de carré au-delà de R_T .

4. Représenter graphiquement $\|\vec{G}_T\|$ dans cette nouvelle modélisation.
5. Compléter soigneusement le graphique en ajoutant l'allure de la courbe obtenue dans la première modélisation.
6. Calculer la masse volumique moyenne du noyau terrestre ($0 < r < R_1$).
7. Représenter graphiquement la masse volumique ρ en fonction de la distance au centre O . Préciser si ρ est croissante ou décroissante dans le manteau terrestre ($R_1 < r < R_T$).