Programme de colles mathématiques PC

Semaine 3 du 22/9 au 26/9

1 Révision d'analyse :

On peut encore poser des exercices sur des développements limités et/ou asymptotiques.

2 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel. Espace vectoriel engendré par une partie, par une famille. Famille libre, famille génératrice. Espaces de dimension finie et bases. Sommes de sous-espaces. Espaces en somme directe (2 et plus), espaces supplémentaires et caractérisations.

Applications linéaires. Lien entre l'injectivité, la surjectivité et l'action sur une base, ainsi qu'avec la dimension. Application linéaire définie par son action sur une base. Rang d'une application linéaire.

Projecteurs et symétries. Hyperplans.

Questions de cours :

- Enoncé (sans preuve) de la définition et des différentes caractérisations de ce que deux espaces F et G sont supplémentaires dans E lorsque E est de dimension finie. (la définition, existence et unicité de la décomposition, avec des bases, et on peut en rajouter avec des arguments de dimension : exemple : si $E = F + G$ et que de plus $\dim E = \dim F + \dim G$, alors...)

- Exercice-type : si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. (exercice 1 du cours)

3 Matrices et déterminants

Matrices, structure, interprétation matricielle d'une application, matrices carrées, inversibles.

Matrices de passage et formules de changement de base.

Matrices définies par blocs, trace.

Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice.

Questions de cours :

- Proposition 11 : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux espaces supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$

- Définition d'une matrice de passage (15), propriétés (P.16 : énoncé seul) et formule de changement de base pour un vecteur (P.17 : énoncé seul), et pour un endomorphisme (P.21 : énoncé seul)

- Déterminant de Vandermonde (formule et sa preuve)