

DEVOIR LIBRE N°1

Classe PC - Promotion 2026



Annales de Mécanique

Les différentes parties sont indépendantes.

► Données numériques :

~> **Constantes :** $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ $N_a = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
 $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
 $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

~> **La planète Terre :** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

~> **L'atome :** $m_{\text{nucléon}} = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $m_{\text{électron}} = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

► Systèmes d'unité et conversion :

~> **Conversion :** $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$

► Formulaire d'analyse réelle :

~> **Trigonométrie :** $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

~> **Dérivation :** $(g \circ f(x))' = f'(x) \times g' \circ f(x)$ $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

► Formulaire d'analyse vectorielle :

~> **Opérateurs en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :**

~> **Gradient :** $\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$

~> **Divergence :** $\text{div} \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$

~> **Rotationnel :** $\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(U_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(U_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial(U_r)}{\partial z} - \frac{\partial(U_z)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r U_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(U_r)}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$

Les pilotes doivent se préparer physiquement aussi bien aux effets de forte accélération qu'à celui de l'apesanteur. On note $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. Dans la fusée, après le départ, ils subissent une accélération de $4g_0$ et dans la phase de retour dans l'atmosphère, une décélération de $-10g_0$.
Remarque : cela signifie que leur poids apparent vaut respectivement $4mg_0 \vec{u}$ et $-10mg_0 \vec{u}$ si m est leur masse et \vec{u} le vecteur unitaire de la direction du poids apparent orienté dans le même sens que la projection du poids.

- 1.** Définir la force poids d'une masse m sur Terre en considérant le référentiel terrestre \mathcal{R} galiléen. Définir la force d'inertie, puis le poids apparent dans un référentiel \mathcal{R}' en mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre (accélération notée $\vec{\gamma}_e$).
L'entraînement utilise des "centrifugeuses" en rotation uniforme autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω . Il s'agit de balançoires (figure 1) qui tournent à la vitesse angulaire ω autour d'un axe horizontal Δ .

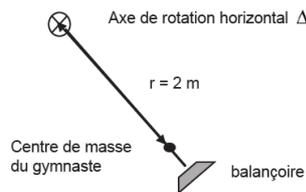


FIGURE 1 – Modélisation d'une balançoire.

- 2.** Définir ce qu'on appelle la force d'inertie centrifuge.
3. À quels poids apparents extrêmes sont soumis les cosmonautes en fonction de ω ?
4. On suppose que sur ces balançoires, le centre de masse du gymnaste solidaire du siège est à une distance de $r = 2 \text{ m}$ de l'axe de rotation horizontal. À quelle vitesse angulaire ω faut-il tourner pour obtenir un poids apparent de norme de $4mg_0$ au maximum ?

Lors d'un vol parabolique, ou vol zéro-g, (figure 2) les pilotes de l'avion effectuent une trentaine de fois une manœuvre particulière dite "manœuvre parabolique" au cours de laquelle l'état d'apesanteur est recréé à bord pendant 30 secondes.

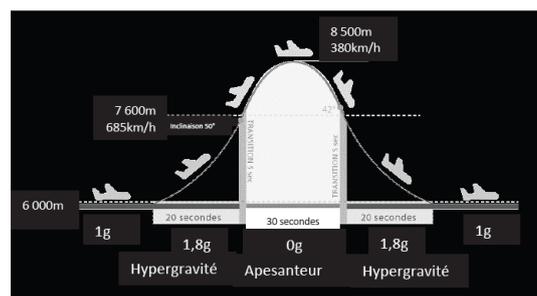


Illustration extraite du site airzerog.com/fr/

FIGURE 2 – Vol zéro-g.

- 5.** La portion parabolique de la trajectoire de l'avion doit être confondue avec la parabole de chute libre de même sommet. Expliquer pourquoi il y a apesanteur dans cette partie de la trajectoire.
6. Vérifier la valeur de la durée de l'apesanteur à partir des caractéristiques du début du mouvement parabolique ($V_0 = 685 \text{ km.h}^{-1}$, inclinaison par rapport au plan horizontal $\alpha = 50^\circ$).

Partie II - Pendule de Foucault

(ENS - 2022)

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67$ m de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36$ kg. La Terre est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation angulaire Ω . On néglige toutes les forces de frottement dans cette partie.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base fixe du référentiel géocentrique considéré galiléen (cf figure 3). La position de la masse m est donnée par ses coordonnées dans le repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel terrestre. Cette base est dite *locale*. On note α l'angle entre le pendule et l'axe vertical dirigé par le vecteur \vec{e}_z (cf. figure 3(b)). On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base mobile suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.

Dans un premier temps, on néglige la force d'inertie de Coriolis.

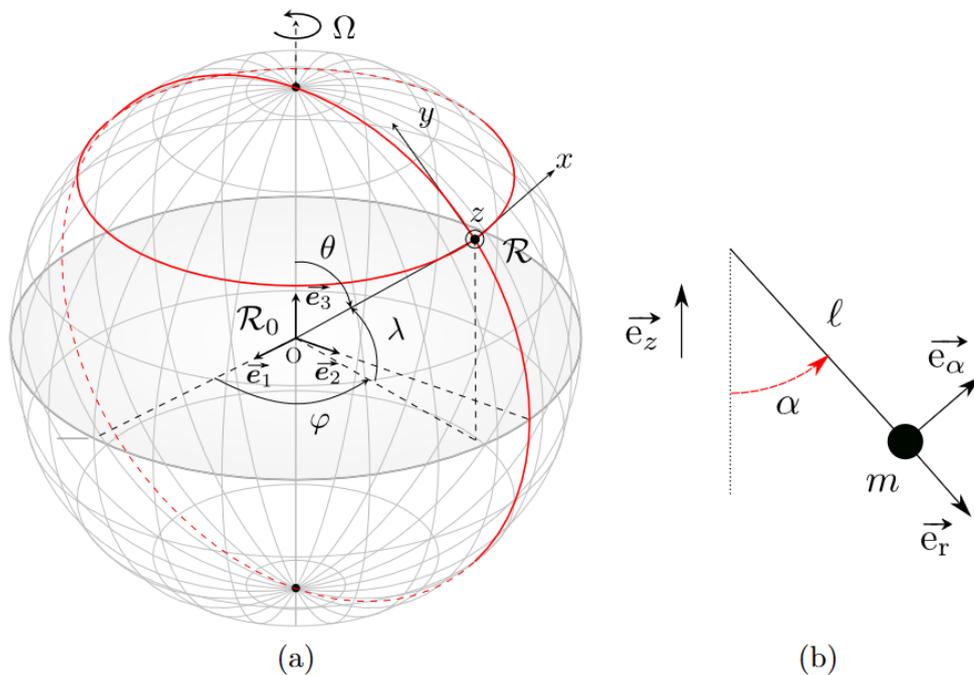


FIGURE 3 – (a) Définitions des repères liés aux référentiels géocentrique et terrestre. (b) Définition de l'angle α et de la base mobile.

7. Dans toute la suite on négligera la force d'inertie d'entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l'axe Oz . Justifier ces approximations par une analyse en ordres de grandeur.

8. Écrire l'équation vectorielle du mouvement de la masse m , puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ définie sur la figure 3(b) (on supposera son mouvement plan).

9. Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique ? On se placera dans cette limite par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0 . Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.

10. Justifier que dans l'approximation précédente le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α .

On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49^\circ$ comme définie sur la figure figure 3(a). On considérera que le mouvement de la masse est plan dans le repère local et on négligera vitesse et accélération selon l'axe Oz . On admettra que l'effet des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x \vec{e}_x - m\omega_0^2 y \vec{e}_y$.

11. Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0 .

12. Décomposer le vecteur $\vec{3}$ dans la base locale et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\tilde{\Omega}\dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\tilde{\Omega}\dot{x} \end{cases}$$

Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.

13. Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par \underline{u} . Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de deux inconnues \underline{A} et \underline{B} .

14. On prend $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de \underline{u} .

15. En utilisant le système d'équations établi plus haut, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.

16. Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale après 24 h ?

17. Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ .

18. Sur la figure 4, on voit le professeur Tournesol utiliser son pendule pour se repérer et se diriger sur Terre. Cela vous semble-t-il possible ? Justifier votre réponse.



FIGURE 4 – Le professeur Tournesol et son pendule.

Il est possible de reformuler ce résultat d'un point de vue géométrique : considérons la position \vec{R} du point d'attache du pendule dans le référentiel géocentrique. La rotation de la Terre sur elle-même conduit \vec{R} à suivre une courbe fermée γ sur le globe. Mais bien que \vec{R} soit revenu à sa valeur initiale, le système dans son ensemble n'est pas revenu à son état initial : le plan d'oscillation du pendule n'est plus le même, il a tourné à cause de la présence de la force de Coriolis. On appelle ce phénomène une non-holonomie.

Soit γ la trajectoire fermée suivie par un point de l'hémisphère nord lors de la rotation de la planète. On définit $h(\gamma)$ comme le rapport de la surface entourée par le contour γ sur la sphère terrestre et la surface totale de la sphère.

19. Faire un schéma de la situation en précisant le chemin. Exprimer $h(\gamma)$ sous la forme d'une intégrale double et la calculer en fonction de λ . Mettre le résultat sous la forme $h(\gamma) = \frac{\chi}{4\pi}$. Comparer la valeur trouvée pour χ obtenu plus haut.

Lancé depuis la Terre le 30 juillet 2020 grâce à un lanceur Atlas V, le rover Perseverance a atterri sur la planète Mars le 18 février 2021. Le site d'atterrissage, le cratère Jezero, est une zone présentant une grande diversité géologique et ayant abrité un lac il y a environ 3,6 milliards d'années. Un des enjeux de cette mission est le prélèvement d'échantillons destinés à être analysés sur Terre afin de détecter d'éventuelles traces d'une vie passée.

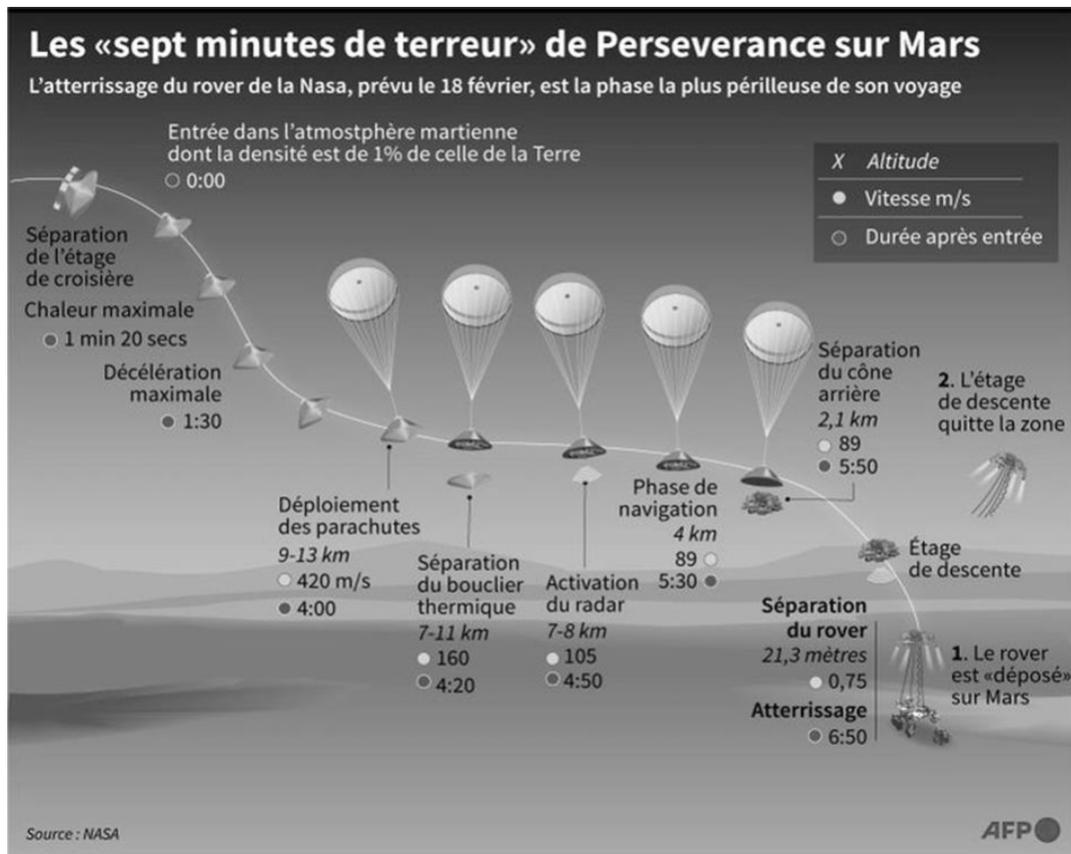


FIGURE 5 – Chronologie de l'atterrissage

La sonde spatiale Mars 2020, de masse m , pénètre dans l'atmosphère martienne à la vitesse de $12000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (vitesse mesurée par rapport au sol), elle larguera le rover 7 minutes plus tard.

Après une première phase de freinage grâce au bouclier thermique, le parachute est déployé à l'altitude d'environ $10,6 \text{ km}$ et à la vitesse, notée v_A , de $420 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

20. Le point A étant l'endroit où le parachute est déployé, donner l'expression littérale de l'énergie cinétique $E_c(A)$ de l'ensemble en se limitant à un simple mouvement de translation.

Au bout de 20 secondes, la vitesse n'est plus que de $160 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et l'altitude de $7,5 \text{ km}$, Mars 2020 largue alors son bouclier thermique.

21. En appelant B le point de largage et en considérant toujours la même masse, exprimer la variation d'énergie cinétique entre les points A et B .

22. Connaissant la masse de la sonde spatiale de 3000 kg , effectuer le calcul de cette variation d'énergie cinétique.

23. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

24. En supposant l'accélération de la pesanteur martienne uniforme et de valeur $g = 3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, calculer la valeur du travail du poids entre les points A et B , noté $W_{AB}(\vec{P})$.

25. Ce travail est-il qualifié de moteur ou de résistant ? Justifier.

26. Montrer que le travail des forces de frottement noté $W_{AB}(\vec{f})$ sur le parachute, dont la résultante sera notée \vec{f} , est d'environ $-2,5 \cdot 10^8 \text{ J}$.

27. Dans la suite du sujet, nous nous limiterons à une étude du mouvement en translation verticale. En supposant cette force de frottement \vec{f} constante, déduire un ordre de grandeur de sa valeur minimale à partir de la question précédente.

En réalité, la résultante des forces de frottement n'est pas constante et dépend de la vitesse du système. Nous considérerons une force de type frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est le coefficient de frottement fluide et \vec{v} est le vecteur vitesse.

28. Soit l'axe (Oz) , vertical et orienté vers le bas, dont l'origine O se situe au point d'ouverture du parachute. Faites un schéma sur lequel figurent la sonde spatiale matérialisée par son centre de gravité G à une altitude quelconque après ouverture du parachute, l'axe (Oz) et les deux forces s'exerçant sur la sonde.

29. La descente de la sonde peut-elle être qualifiée de chute libre ? Justifier.

30. À partir de la seconde loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par la projection de la vitesse \vec{v} de la sonde sur l'axe vertical et la mettre sous la forme : $\frac{dv}{dt} + Av = B$, où A et B représentent deux constantes dont on précisera les expressions.

31. Sans résoudre l'équation, déduire de la question précédente l'expression de la vitesse limite théorique pouvant être atteinte par la sonde avec cette hypothèse, au bout d'un temps infiniment long.

Pour pouvoir réussir cette phase périlleuse, l'étage de descente (le skycrane) dispose d'un radar Doppler comportant six antennes dévoilées dès que le bouclier thermique est largué. Le radar peut alors déterminer avec précision la vitesse et l'altitude de la sonde.

La bande Ka (Kurz Above) du spectre électromagnétique est très utilisée dans le domaine des télécommunications spatiales ; on considère une fréquence moyenne de 30 GHz.

32. Calculer la longueur d'onde dans le vide, notée λ_0 , associée à cette fréquence. Lorsque la sonde se trouve à une altitude H , celle-ci peut être déterminée avec précision grâce à la durée mise par l'onde pour effectuer un aller-retour entre l'antenne d'émission et le sol.

33. Exprimer l'altitude H de la sonde en fonction de la durée mise par l'onde pour effectuer cet aller-retour.

34. À partir de l'infographie du CNES (figure 5), estimer le temps Δt écoulé entre l'émission de l'onde par le radar de la sonde et sa réception après réflexion sur le sol martien, au moment de la séparation du bouclier thermique.

Un moteur électrique est constitué de deux parties : un stator $\underline{0}$ qui est lié rigidement au bâti et qui reste fixe au cours du temps ; et un rotor $\underline{1}$ qui est généralement animé d'un mouvement de rotation. Le système (S) étudié ici est constitué du rotor $\underline{1}$ et d'une poulie $\underline{2}$ de rayon R . Le stator ($\underline{0}$) entraîne le système (S) en rotation autour de l'axe. Le système (S) possède un moment d'inertie J_{O_z} par rapport à l'axe (Oz). Le référentiel terrestre \mathcal{R}_0 est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le référentiel \mathcal{R}_1 est associé au stator $\underline{0}$. On note \mathcal{R}_1 le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. Le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lié rigidement au système (S), se déduit à chaque instant de $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz_0). On s'intéresse tout d'abord au démarrage à vide du moteur. On désire que la vitesse de rotation $\omega = \dot{\theta}$ du système (S) par rapport au stator $\underline{0}$ atteigne la vitesse de fonctionnement ω_f en un nombre de tours N . Le schéma du système est représenté en figure 6

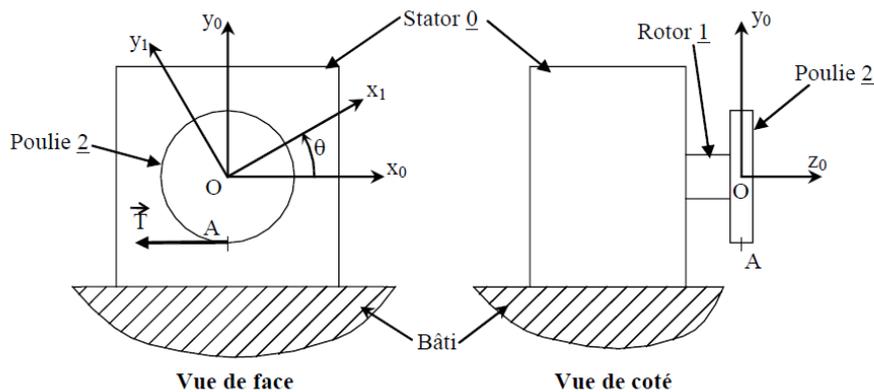


FIGURE 6 – Repérage choisi pour l'étude.

- 35.** En supposant que le mouvement est uniformément accéléré au cours de cette phase, déterminer l'accélération angulaire $\dot{\omega}_1$ en fonction de ω_f et de N .
- 36.** En appliquant le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe (Oz_0) au système (S), déterminer le couple C_d nécessaire au démarrage du système (S) en fonction de ω_f , N et J_{O_z} .
- 37.** Application numérique : Calculer l'accélération angulaire $\dot{\omega}_1$ et le couple C_d si $\omega_f = 314 \text{ rad.s}^{-1}$, $N = 1800$ tours et $J_{O_z} = 0,068 \text{ kg.m}^2$.
On étudie maintenant le démarrage en charge du moteur. Le stator $\underline{0}$ exerce sur le système (S) un couple constant $\vec{C}_d = C_d \vec{z}_0$. Les liaisons n'étant pas parfaites, il existe du frottement qui exerce sur le rotor $\underline{1}$ un couple résistant $\vec{C}_f = -C_f \vec{z}_0$. D'autre part, la poulie $\underline{2}$ entraîne une courroie. La courroie exerce donc au point A un effort tangentiel $\vec{T} = -T \vec{x}_0$ sur la poulie $\underline{2}$.
- 38.** Déterminer le couple \vec{C}_p engendré par la courroie sur la poulie au point O.
- 39.** En utilisant le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe, déterminer l'accélération angulaire $\dot{\omega}_2$ lors du démarrage en charge du moteur en fonction de J_{O_z} , C_d , C_f , T et R .
- 40.** En déduire la durée t nécessaire pour que le moteur atteigne sa vitesse de fonctionnement ω_f .
- 41.** Application numérique : Calculer la durée de démarrage t pour $C_d = 17,8 \text{ mN}$, $C_f = 0,16 \text{ mN}$, $T = 78 \text{ N}$ et $R = 70 \text{ mm}$.
- 42.** Que devient le couple moteur au moment où la vitesse de rotation atteint la vitesse de fonctionnement ω_f ?

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

A - Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

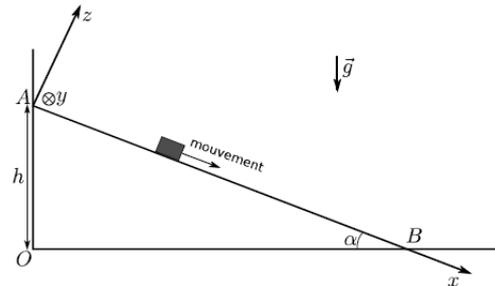


FIGURE 7 – Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

43. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92$ km/h.

44. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon \vec{e}_x seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

45. À l'aide du principe fondamental de la dynamique (aussi appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de N en fonction de m , g , et de l'angle α .

46. Exprimer le travail de la force \vec{R} , pour le mouvement entre les points A et B , d'abord en fonction de la longueur AB et de T . Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ , h , m , g et de l'angle α .

47. A l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B , en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

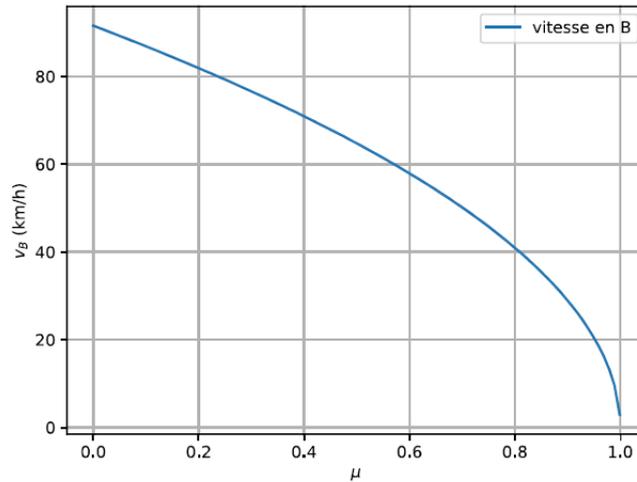


FIGURE 8 – Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ pour $\alpha = 45^\circ$.

48. La figure 8 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

49. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

B - Étude préliminaire d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) de la figure 9. On néglige tout frottement. On note \vec{g} le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ .

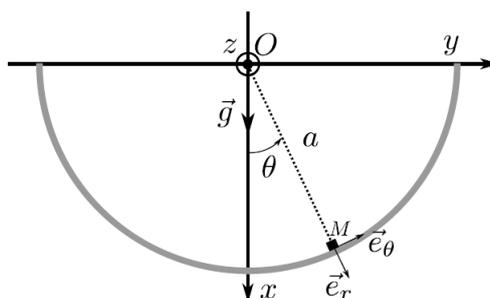


FIGURE 9 – Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon (Oz) .

50. Donner l'expression du moment cinétique σ_{Oz} de la masse m selon l'axe Oz , en fonction de m , a et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

51. Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe Oz , en fonction de m , g , a et θ .

52. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle qui porte sur $\theta(t)$.

- 53.** Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation. Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
- 54.** Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.
- 55.** Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

B - Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté figure 10. On se place dans l'approximation où ce plan (Oxy), qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan Oxy uniquement (figure 4, droite).
- Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$.
- Dans le référentiel du plan (Oxy), alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids \vec{P} , à \vec{F} , et à la réaction normale \vec{N} du toboggan (on néglige tout frottement).

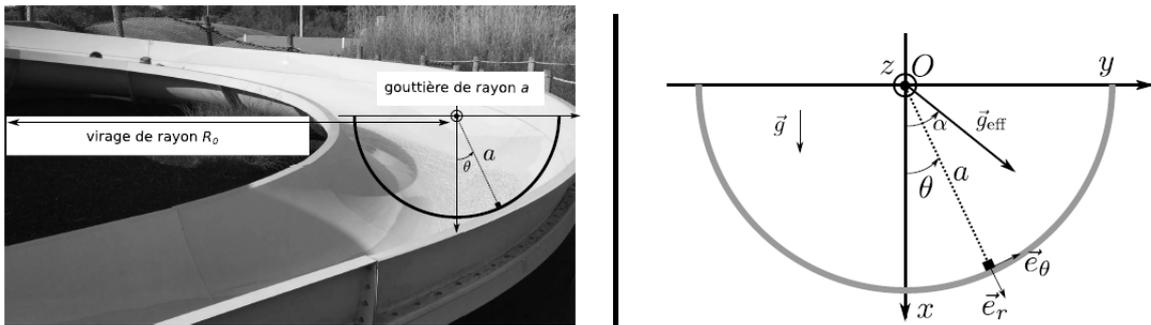


FIGURE 10 – Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière. 14 - Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m \vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec \vec{g}_{eff} une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g, R_0 et v_0 .

- 56.** Donner également l'expression de l'angle α entre \vec{g}_{eff} et l'axe Ox_1 en fonction de g, R_0 et v_0 . Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km/h}$ et $R_0 = 4 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.
- 57.** Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous-partie précédente, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question. Conclure sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

Partie VI - Frappe au hockey

(CCCINP ?? - 2017)

Le hockey sur glace est un sport d'équipe se jouant sur une patinoire. L'objectif de chaque équipe est de marquer des buts en envoyant un disque de caoutchouc, appelé palet, à l'intérieur du but adverse situé à une extrémité de la patinoire. Les joueurs se déplacent en patins à glace et dirigent le palet à l'aide d'un bâton de hockey également appelé crosse. Cette dernière est composée de deux parties : le manche qui permet au joueur de tenir la crosse et la palette qui permet de taper dans le palet. Le terrain de jeu, la patinoire, mesure 60 mètres de long sur 30 mètres de large.

Le palet est fabriqué en caoutchouc avec une masse moyenne de 160 grammes. Sur la glace, le palet peut atteindre des vitesses exceptionnelles du fait de la puissance des joueurs. En Russie, lors des épreuves d'habileté de la Ligue continentale de hockey, le défenseur Aleksandr Riazantsev a établi un nouveau record du monde en janvier 2017 avec une frappe à $183,67 \text{ km.h}^{-1}$ soit environ 50 m.s^{-1} .

Au cours d'une séance d'entraînement à ces épreuves d'habileté, un joueur de hockey propulse le palet, à l'aide de sa crosse, sur un plan recouvert de glace et incliné d'un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale. La position du centre d'inertie du palet est repérée sur un axe (Ox) de même direction que la ligne de plus grande pente et orienté vers le haut. On note (Oy) l'axe perpendiculaire au plan incliné et orienté vers le haut. Les vecteurs \vec{u}_x et \vec{u}_y sont des vecteurs unitaires dirigés respectivement selon les axes (Ox) et (Oy) . Le centre d'inertie du palet est noté G (figure 11). À l'instant initial, le palet se trouve à l'origine du repère. L'intensité du champ de pesanteur terrestre \vec{g} est estimée à 10 m.s^{-2} .

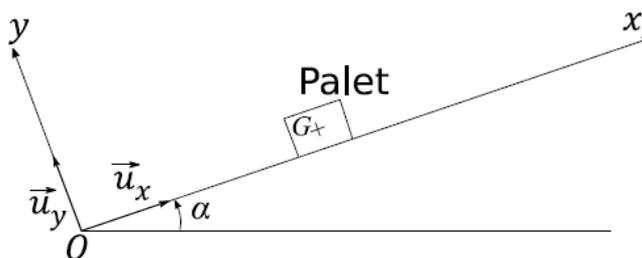


FIGURE 11 – Modélisation de la situation.

Dans une première phase (propulsion du palet par la crosse sur le plan incliné), on considère les frottements comme négligeables. La palette de la crosse est en contact avec le palet.

58. Choisir un référentiel afin d'étudier le mouvement du palet durant la propulsion et le préciser.
59. Peut-il être considéré comme galiléen dans le cadre de cet entraînement ?
60. Établir un bilan des forces qui s'exercent sur le palet durant la propulsion et les représenter sur un schéma cohérent sans souci d'échelle.
61. Exprimer l'intensité de la force de propulsion F exercée par le joueur sur le palet en fonction de l'accélération a du palet, de l'angle d'inclinaison α du plan, de la masse m du palet et de l'intensité du champ de pesanteur g .
62. Sachant que la propulsion due au joueur de hockey dure 0,5 seconde et que le mouvement est uniformément accéléré, quelle doit être l'intensité de la force de propulsion pour que le joueur égale le record du monde de vitesse sur ce plan incliné ?

Dans une deuxième phase, le palet n'est plus en contact avec la crosse et est en mouvement de translation rectiligne vers le haut du plan incliné. On considère les frottements comme négligeables.

63. Sur un schéma, représenter les forces qui s'exercent sur le palet. Ces forces ont-elles un caractère moteur, résistant ou sont-elles sans effet lors du mouvement du palet vers le haut du plan incliné ?

64. Déterminer l'expression de $x(t)$, déplacement du palet selon l'axe (Ox) .

65. Montrer que la distance d parcourue par le palet avant de s'arrêter est donnée par la relation :

$$d = \frac{v_0^2}{2g \sin(\alpha)}$$

où v_0 est la vitesse initiale selon l'axe (Ox) au début de la deuxième phase.

On cherche à établir la distance qui a été nécessaire pour que le palet s'arrête lors de l'établissement du record du monde sur une patinoire de surface horizontale. Il faut tenir compte des frottements solides. Par la suite, on note f_s et f_D les coefficients de frottement statique et dynamique, et \vec{R}_T et \vec{R}_N les composantes tangentielle et normale de la réaction.

66. Les forces de frottements solides sont-elles conservatives ?

67. Calculer le travail de la composante tangentielle \vec{R}_T de l'action de la glace sur le palet lors du déplacement du palet.

68. On considère que la composante \vec{R}_T est un vecteur constant. Quelle distance faut-il au palet pour s'arrêter ? Combien de longueurs de patinoires le palet pourrait-il parcourir avant de s'arrêter ?

A.) Démarrage du train de Trevithick



FIGURE 12 – La locomotive de Trevithick.

Le premier train qui sera étudié est celui de Trevithick. L'idée de Trevithick a été d'associer la roue pour le transport, à la machine à vapeur pour la force motrice. Au cours d'un essai, la locomotive de Trevithick de masse $M_\ell = 1 \text{ t}$, dont la figure 12 montre une reproduction, a été capable de tracter un ensemble de dix wagons portant un chargement d'acier de masse totale $M_c = 10 \text{ t}$ sur une distance $D = 15 \text{ km}$. Lors de cet essai en ligne droite, conduit sur des rails en fonte horizontaux parallèles à l'axe Ox , le train parvint à atteindre la vitesse $v_0 = 8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, supposée constante après la phase de démarrage.

On étudie ici la phase de démarrage de la locomotive tractant les dix wagons. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre supposée galiléen. On envisage un démarrage à accélération constante, et on note \vec{a}_0 cette accélération. On définit deux systèmes :

- le système Σ_1 , de masse totale M_c , est constitué de l'ensemble des 10 wagons et de leur charge.
- le système Σ_2 correspond à la locomotive de Trevithick, de masse totale M_ℓ , et qui compte également quatre roues en acier.

On note $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ la force qu'exerce Σ_2 sur Σ_1 ; cette force est supposée horizontale.

On adopte un modèle très simpliste de contact ponctuel entre les roues et les rails et on suppose qu'aucune roue ne glisse sur les rails. On donne pour le contact acier-fonte le coefficient d'adhérence (également appelé coefficient de frottement statique) f_a . Les lois de Coulomb du frottement solide sont rappelées en annexe.

On admet qu'une étude dynamique permet d'établir, qu'en considérant les roue de masse négligeable, la force \vec{F}_{r1} exercée par les rails sur une roue du système Σ_1 est normale au rail. Par la suite, on fera cette approximation pour toutes les roues du système Σ_1 . On note également \vec{F}_{r2} la force qu'exerce le rail sur une des quatre roues de la locomotive, avec $\vec{F}_{r2} = \vec{N}_{r2} + \vec{T}_{r2}$, où \vec{N}_{r2} et \vec{T}_{r2} désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de l'action d'un rail sur une roue de la locomotive.

69. Faire un schéma de la situation et représenter les forces qui s'exercent sur Σ_1 . Exprimer la force $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ en fonction, entre autres, de l'accélération \vec{a}_0 .

70. Faire un autre schéma où figurent les forces qui s'exercent sur Σ_2 . On négligera toute force de frottement fluide due à l'air.

71. Montrer que \vec{T}_{r2} est nécessairement non nulle. On admettra que cette force est identique sur les quatre roues de la locomotive. Exprimer \vec{T}_{r2} en fonction notamment de l'accélération \vec{a}_0 et des diverses masses introduites dans l'énoncé.

72. Calculer le temps qu'a mis le train de Trevithick à atteindre sa vitesse de croisière, en supposant que $\|\vec{T}_{r2}\| = 0,1 f_a \|\vec{N}_{r2}\|$, de sorte que l'absence de glissement est assurée.

B.) Circulation des Trains à Grande Vitesse (TGV)

On s'intéresse maintenant aux voies des trains à grande vitesse, dont le tracé est déterminé par diverses contraintes. Une des contraintes essentielles est que le trajet doit être le plus horizontal possible. La morphologie des territoires traversés impose de ce fait des tracés courbes pour les trajets des trains.

B.1.) Passage en courbe

On envisage ici le problème de la jonction entre deux tronçons rectilignes A_0A et B_0 formant un angle de 120° (figure 13). On considère pour simplifier que le tracé de la voie entre les points A et B suit une portion du cercle \mathcal{C} tangent aux deux segments de droites en A et B . On note d_{AB} la distance en ligne droite entre ces deux points. Le référentiel terrestre est toujours supposé galiléen.

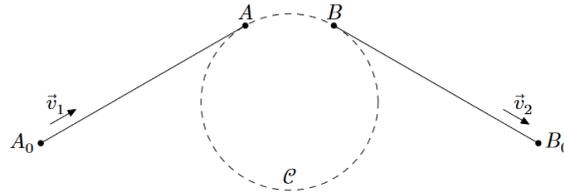


FIGURE 13 – Raccordement circulaire entre deux tronçons rectilignes.

73. Déterminer le rayon R_C du cercle \mathcal{C} en fonction des données.

74. En supposant la vitesse du train constante en norme, de valeur notée V_0 (soit $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = V_0$), tracer l'évolution de la norme de l'accélération du train, assimilé à un point matériel, entre l'instant $t = 0$ où il se trouve en A_0 et l'instant t_f où il se trouve en B_0 .

75. Calculer la valeur numérique de l'accélération a_C entre les points A et B dans le cas où $d_{AB} = 2$ km et $V_0 = 300$ km·h⁻¹.

Au niveau d'un tel virage, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une différence de hauteur entre les rails intérieur et extérieur qui permet d'incliner le train. Ce dévers est conçu de sorte qu'un passager ne soit pas trop fortement déporté sur le bord de son siège au cours du virage. L'écartement entre les deux rails au niveau des roues est quant à lui fixé à $E_r = 1400$ mm.

Lors d'un voyage en TGV, un passager curieux d'étudier ce dévers a placé un pendule simple, constitué d'une masse m_p reliée à un fil inextensible, au dos du siège situé devant lui, vers l'avant du train. Ainsi fixé, ce pendule peut se déplacer librement dans un plan vertical perpendiculaire à la vitesse du train. La figure 14 montre la position d'équilibre du pendule dans le virage indiqué sur la carte, alors que le train roule à 287 km·h⁻¹.

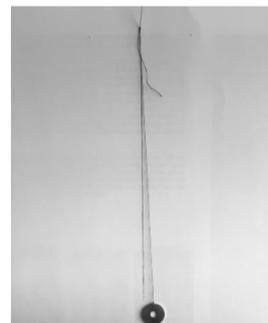
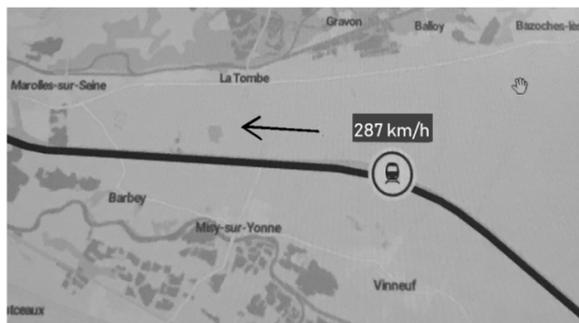


FIGURE 14 – La carte permet d'estimer que le rayon de courbure du virage lors de la réalisation de l'expérience est $R_C = 4$ km. Sur la photo à droite, le segment noir matérialise la verticale lorsque le train est à l'horizontale.

76. Estimer la valeur du dévers lors de la réalisation de cette expérience. Préciser à l'aide d'un schéma clair lequel des deux rails, intérieur ou extérieur au virage, est surélevé.

B.2.) Usure abrasive des rails sur la ligne de TGV Paris-Lyon

Pour cette sous-partie, et pour celle-ci seulement, on considère que le référentiel terrestre \mathcal{R}_t est non galiléen et que le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g est galiléen.

77. Décrire le mouvement du référentiel terrestre \mathcal{R}_t par rapport au référentiel \mathcal{R}_g .

On considère la ligne de TGV Paris-Lyon, dont la longueur est approximativement de 500 km, et sur laquelle les trains (figure ??) roulent à la vitesse $V_0 = 300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ par rapport au référentiel terrestre. La ligne est composée de deux voies : une servant pour le trajet de Paris vers Lyon, l'autre pour le trajet Lyon vers Paris.



FIGURE 15 – Un train de dernière génération circulant sur la ligne Paris-Lyon.

On étudie par la suite un TGV allant de Paris à Lyon, sur un tronçon rectiligne horizontal, localement confondu avec une ligne méridienne nord-sud. La figure 16 schématise le contact entre les rails et les roues de ce train.

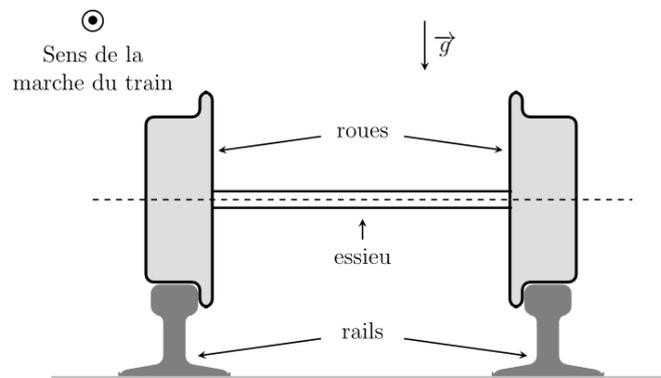


FIGURE 16 – Schéma - en coupe - du contact entre les rails et les roues du TGV (les échelles de distance ne sont pas respectées).

78. La prise en compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre implique l'existence d'une force normale horizontale exercée par l'intérieur d'un des deux rails sur les roues avec lesquelles il est en contact. Identifier, en le justifiant, le rail concerné dans le cas d'un TGV circulant de Paris vers Lyon. Sur un schéma inspiré de celui de la figure 16 faire figurer les forces de contact exercées par les rails sur les roues.

De nos jours, les rails sont réalisés en acier trempé très dur, afin d'en limiter l'usure. Il existe différents types d'usure des rails; nous n'envisagerons ici que l'usure abrasive, qui a lieu à l'interface entre les roues et le rail.

On note que, lorsqu'on étudie l'usure, on prend en compte le fait que le contact roue-rail n'est pas ponctuel : cela implique qu'il y a nécessairement une zone de contact glissant, même en cas d'adhérence. Diverses lois permettent de quantifier cette usure ; nous nous limiterons à la loi d'usure de Preston-Archard selon laquelle le volume de matière usée peut être calculé par la formule

$$V = k \frac{F_n}{H} d$$

où H est la dureté du matériau dont l'unité est $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$, d la distance sur laquelle a eu lieu le glissement, F_n la force normale au glissement et k un coefficient, appelé coefficient d'Archard, qui dépend des conditions expérimentales, matériaux, température, géométrie, etc.

- 79.** Discuter qualitativement la loi de Preston-Archard.
- 80.** Déterminer la dimension du coefficient d'Archard k .
- 81.** Pour le rail identifié plus haut, comparer le degré d'usure des faces supérieure et intérieure du rail. Préciser les approximations réalisées.

C'est en janvier 1610, à l'aide d'une très modeste lunette astronomique, que Galilée se rendit compte de la présence de quatre points lumineux à proximité de la planète géante. En notant soigneusement leurs positions, plusieurs soirs de suite, il s'aperçut que ces quatre points étaient mobiles et comprit qu'ils tournaient autour de la planète. Galilée venait de découvrir les quatre satellites principaux de Jupiter.

Le tableau présente en figure 17 regroupe certaines données concernant ces satellites dont les orbites sont quasi-circulaires :

Satellite	Distance moyenne au centre de Jupiter	Période de révolution sidérale
Io	$4,218 \cdot 10^5$ km	1,769 jour
Europe	$6,714 \cdot 10^5$ km	3,551 jours
Ganymède	$1,070 \cdot 10^6$ km	7,155 jours
Callisto	$1,883 \cdot 10^6$ km	16,689 jours

FIGURE 17 – Données sur les satellites galiléens.

82. Énoncer la troisième loi de Kepler, puis estimer la masse de Jupiter en précisant la méthode utilisée.

83. Calculer la masse volumique moyenne de cette planète sachant que $R_J = 69911$ km.

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le "lancer" vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_l est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il "s'échappe".

84. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini), déterminer la vitesse de libération v_l en tenant compte de l'accélération de la pesanteur g supposée constante à la surface de la Terre. Calculer numériquement v_l .

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une orbite elliptique de 53 jours. On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse m soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse $M_J = 1,97 \times 10^{27}$ kg. En outre, le centre O de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position $\vec{r} = \vec{OP}$.

85. Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ? Justifier alors l'approximation galiléenne du référentiel jupiterocentrique.

86. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique $\vec{L}_{O,P} = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_P$ est constant au cours du temps. Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la figure 18.

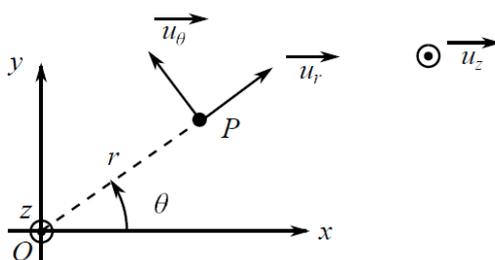


FIGURE 18 – Repère choisi pour l'étude

87. Déterminer les expressions du vecteur position \vec{r} et du vecteur vitesse \vec{v}_P dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

88. On définit le vecteur \vec{C} par $\vec{C} = \frac{\vec{L}_{O,P}}{m}$. En exprimant \vec{C} dans la base cylindrique orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, montrer que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z$.

89. Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$E_{m,P} = E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - G \frac{mM_J}{r}$$

Justifier que E_m se conserve.

90. Tracer l'allure de $U_{\text{eff}}(r)$ et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de E_m . On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.

91. En utilisant les données, déterminer le demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la sonde. Exprimer, sans justifier, E_m en fonction de a . En déduire une première équation liant la distance minimale r_{\min} , la distance maximale r_{\max} et a . Montrer également que r_{\min} et r_{\max} vérifient la relation suivante :

$$r_{\min} r_{\max} = \frac{mC^2}{2E_m}$$

Ces deux relations permettent de déterminer r_{\min} et r_{\max} , ce que l'on ne demande pas.

- Fin du sujet -