Réduction

Question 1. Définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Question 2. Soit $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Qu'appelle-t-on espace propre de f associé à λ ?

Question 3. Que dire des espaces propres de deux endomorphismes u et v qui commutent ?

Question 4. Soit u un endomorphisme de E, et soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Que dire de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$?

Question 5. Soit u un endomorphisme de E et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Que dire des espaces propres associés ?

Question 6. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Qu'appelle-t-on spectre de u ?

Question 7. Définition, caractérisations, d'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, puis de son espace propre associé.

Question 8. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton

Question 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit p un projecteur de E. p est-il diagonalisable ?

Question 10. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé et de racines (non supposées 2 à 2 distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$). Exprimer en fonction de A la somme et le produit des λ_k.

Question 11. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit λ une valeur propre de f. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité de λ ?

Question 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit s une symétrie vectorielle de E. s est-elle diagonalisable ?

Question 13. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de A. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité de λ ?

Question 14. Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, P un polynôme annulateur de f et λ une valeur propre de f. Que peut-on affirmer alors ? (Et quid de la réciproque ?)

Question 15. Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Enoncer des conditions nécessaires et suffisantes à ce que f soit diagonalisable

Question 16. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Enoncer des conditions nécessaires et suffisantes à ce que A soit diagonalisable

Question 17. Soit $P(X)$ le polynôme unitaire $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Qu'appelle-t-on matrice compagnon de P et que peut-on en dire ?

Question 18. A quelle condition $A \in M_n(\mathbb{K})$ est-elle trigonalisable ?

Exercice 1. Diagonaliser $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang 1 (on suppose $n \geqslant 2$). A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Le cas échéant, diagonaliser avec le moins de calculs possible

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$