Réduction

Réponse 1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de f si et seulement si il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda \cdot x$. On dit alors de x qu'il est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

En d'autres termes, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ si et seulement si $f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

Réponse 2. L'ensemble $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E)$ qui forme un sous-espace vectoriel de E.

Réponse 3. Les espaces propres de u sont stables par v et réciproquement. (En effet, si $u(x) = \lambda \cdot x$, alors $v(u(x)) = \lambda \cdot v(x)$ tandis que $u(v(x)) = v(u(x))$ et donc $v(x) \in E_\lambda(u)$ et on a établi ici que $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$.

Réponse 4. Elle est libre.

Réponse 5. Ils sont en somme directe.

Réponse 6. L'ensemble $\mathrm{Sp}(u)$ des valeurs propres de u. On le sait fini, de cardinal au plus égal à la dimension de E.

Réponse 7. λ est une valeur propre de A si et seulement si (les conditions suivantes sont équivalentes)

- Il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda \cdot X$
- $\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_n) \neq \{0\}$
- $A - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inversible
- λ est une racine du polynôme caractéristique $\chi_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$ de A.

L'espace propre de A associé à λ est alors $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$.

Réponse 8. Soit u un endomorphisme de E de dimension finie, alors χ_u (le polynôme caractéristique de u) est un polynôme annulateur de u.

S'applique aussi bien sûr aux matrices carrées : si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$.

Réponse 9. Oui ! On sait que dans une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, alors la matrice de p est diagonale avec des 1 puis des 0 sur la diagonale. (p admet donc, en général, deux valeurs propres : 1 d'espace propre associé $\mathrm{Im}(p)$ et 0 d'espace propre associé $\mathrm{Ker}(p)$)

Réponse 10. $\sum \lambda_k = \mathrm{Tr}(A)$ (qui est aussi l'opposé du coefficient selon t^{n-1} de $\chi_A(t)$) et $\prod \lambda_k = \det(A)$ (qui est aussi, au signe près, $\chi_A(0)$: $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A) = \prod(-\lambda_k)$.)

Réponse 11. L'ordre de multiplicité $m(\lambda)$ de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_f de f. ATTENTION : ce n'est pas alors forcément la dimension de l'espace propre associé à λ dont on peut seulement dire : $1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant m(\lambda)$.

Réponse 12. Oui ! En notant F l'axe de s et G sa direction, on sait que tout élément de F est invariant par s et tout élément $x \in G$ a pour image $-x$ par s et ainsi, dans une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ (formée de la réunion d'une base de F et d'une base de G) alors la matrice de s est diagonale avec sur la diagonale des 1 puis des -1.

s admet ainsi, en général, deux valeurs propres : 1 d'espace propre associé l'axe F de s, et -1 d'espace propre associé la direction G de s.

Réponse 13. L'ordre de multiplicité $m(\lambda)$ de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A de A. ATTENTION : de la dimension de l'espace propre de A associé à λ, on ne connaît a priori que les inégalités : $1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant m(\lambda)$.

Réponse 14. On sait alors que λ est une racine de P, car en notant $P(X) = a_p X^p + \cdots + a_0$, il vient étant donné $x \neq 0$ un vecteur propre de f associé à λ : $P(f)(x) = a_p f^p(x) + \cdots + a_1 f(x) + a_0 x = (a_p \lambda^p + \cdots + a_1 \lambda + a_0) \cdot x = P(\lambda) \cdot x = 0$ et ainsi $P(\lambda) = 0$.

La réciproque est évidemment fausse, car par exemple le polynôme nul est un polynôme annulateur de f, mais bien sûr toutes les racines de celui-ci ($\mathbb{K}$ tout entier) ne sont pas des valeurs propres de f !

Question 15. Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Enoncer des conditions nécessaires et suffisantes à ce que f soit diagonalisable

Réponse 16. A est diagonalisable si et seulement si (les conditions suivantes sont équivalentes) :

- Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$
- Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres (distinctes) de f, alors $\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(A)$
- La somme des dimensions des espaces propres de A vaut n.
- Le polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ et de plus, pour tout λ racine de celui-ci, la dimension de l'espace propre associé est égale à la multiplicité $m(\lambda)$ de λ en tant que racine de χ_A.
- Il existe un polynôme annulateur de A scindé et à racines simples
- $\Pi_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)}(X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A.

ATTENTION : le fait que χ_A soit scindé à racines simples montre que A est diagonalisable, mais ce n'est en aucun une condition nécessaire à ce qu'elle le soit.

Réponse 17. La matrice compagnon de P peut prendre l'une ou l'autre des deux formes suivantes (transposées l'une de l'autre) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La propriété remarquable d'une matrice compagnon de P est que $\chi_M = P$. La démonstration se fait par une récurrence, et l'hérédité s'obtient par un développement du déterminant suivant la première (voire la dernière) ligne (si on prend la matrice de gauche) ou suivant la première colonne (si on a choisi celle de droite bien sûr).

Réponse 18. si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Solution 1. Déjà U est de rang 1 et une base de son noyau, lequel n'est autre que $E_0(U)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. De la trace de U, on déduit que la racine manquante de χ_U vaut 3 et, vu que $U - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ on observe que $E_3(U) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $U = PDP^{-1}$.

Solution 2. On sait déjà que 0 est une valeur propre de A et son espace propre associé $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-1$. 0 est alors une racine de χ_A de multiplicité au moins égale à $n-1$. χ_A admet alors une dernière racine dans $\mathbb{K}$. Ce pourrait encore être 0 et dans ce cas, 0 serait une valeur propre de A de multiplicité n, et $\dim E_0(A) < n$ et donc A ne serait pas diagonalisable. Ou bien cette dernière racine n'est pas nulle, et on a alors une dernière direction propre, de dimension 1 associé à une valeur propre non nulle.

Pour en décider, il suffit de regarder la trace de A égale à la somme des racines de χ_A (puisque χ_A est forcément ici scindé) : si elle est nulle, A n'est donc pas diagonalisable, et si elle est non nulle, alors A est diagonalisable.

A noter enfin que si $\lambda = \mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors $E_\lambda(A) = \mathrm{Im}(A)$ donc nul besoin de poser des équations pour déterminer cette direction propre : il suffit de prendre n'importe quelle colonne non nulle de A.

Solution 3. A est de rang 1 et 0 est donc une valeur propre d'espace propre associé de dimension 2. $\chi_A(X)$ qui se factorise par X^2 est dès lors un polynôme scindé et la dernière racine λ de χ_A est donnée par $\mathrm{Tr}(A) = 0 + 0 + \lambda = -1$.

Une base de $E_0(A)$ est alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 et ses colonnes satisfont $C_1 = C_3 + 2C_2$ et ainsi $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A = PDP^{-1}$

B est également de rang 1, mais sa trace vaut 0, ce qui indique que 0 est une racine triple de χ_B. L'espace propre associé a pour dimension 2 ce qui suffit à conclure que B n'est pas diagonalisable.