Suites de fonctions

Question 1. Comment étudier la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) sur un intervalle I ?

Question 2. Comment montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I ? ou au contraire qu'elle ne converge pas uniformément vers f ?

Question 3. Donner des conditions suffisantes à ce que la limite f d'une suite de fonctions (f_n) sur I soit continue.

Question 4. Donner des conditions suffisantes à ce que la limite f d'une suite de fonctions (f_n) soit de classe $\mathcal{C}^k$.

Question 5. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge simplement vers $f : I \to \mathbb{K}$ elle aussi continue par morceaux. Donner des conditions suffisantes à ce que $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 6. Enoncé du théorème de convergence dominée

Question 7. Enoncé du théorème d'interversion limite-intégrale

Exercice 1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^2 \arctan(x^n)\,\mathrm{d}x$ converge et en donner la limite.

Exercice 2. Etudier la convergence, simple et uniforme, de la suite f_n sur $\mathbb{R}^+$ définie par $f_n(x) = \exp\big(x + \frac{1}{n}\big)$