# Suites de fonctions

**Réponse 1.** Rien de mystérieux ici bien sûr, on prend $x \in I$ quelconque (si nécessaire, on distingue plusieurs sous-intervalles) et on étudie la convergence de la suite $(f_n(x))$...

**Réponse 2.** Il s'agit de montrer qu'on peut majorer $|f(x) - f_n(x)|$ pour tout $x \in I$ de manière indépendante de $x$ par une expression de la forme $\alpha_n$ où $\alpha_n \to 0$. Très souvent, on peut faire une étude de fonction : les variations de la fonction $f - f_n$ permettront de montrer que $f - f_\infty$ est bornée et de déterminer $\|f - f_n\|_\infty$.

Il n'y a pas de méthode type pour contredire la convergence uniforme, mais voici trois arguments qui permettent de conclure :

- si la fonction $f - f_n$ n'est pas bornée à partir d'un certain rang, inutile de chercher plus loin : la convergence de $(f_n)$ vers $f$ ne saurait être uniforme
- si $f - f_n$ est bornée (ou à partir d'un certain rang) et le calcul de $\|f - f_n\|_\infty$ est facile, bien sûr on remarque alors que $(\|f - f_n\|_\infty)$ ne converge pas vers 0
- sinon, on essaye d'exhiber une suite $(x_n)$ de $I$ telle que $(f(x_n) - f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0.

**Réponse 3.** Il est suffisant que les fonctions $f_n$ soient toutes continues et que la convergence soit uniforme.

**Réponse 4.** Si toutes les fonctions $(f_n)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, si il y a convergence simple de $(f_n)$ vers $f$, de $(f_n')$ vers une certaine fonction $h_1$, de $(f_n'')$ vers une certaine fonction $h_2$ jusqu'à $\left(f_n^{(k-1)}\right)$ qui converge encore simplement vers $h_{k-1}$ et si de plus $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément vers $h_k$, alors (ouf !) $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$, et de plus pour tout $l \in [\![1, k]\!]$, $f^{(l)} = h_l$.

**Réponse 5.** Si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$, alors le passage à la limite est établi (et la démonstration n'en est d'ailleurs pas très difficile).

Sinon, alors on se rabat sur le théorème de convergence dominée, en cherchant une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux (ce qui la rend intégrable sur le segment $[a, b]$) telle que pour tout $n$ et pour tout $t \in [a, b]$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$. Le plus souvent, on cherchera $\varphi$ sous la forme d'une fonction constante.

**Réponse 6.** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues par morceaux de $I$ dans $\mathbb{K}$ qui converge simplement vers $f : I \to \mathbb{K}$ également continue. On suppose qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $I$ telle que pour tout $n$, $|f_n| \leqslant \varphi$. Alors pour tout $n$, $(f_n)$ est intégrable sur $I$ et $\int_I f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I f$.

**Réponse 7.** Soient $a < b$, $(f_n)$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, qui converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{K}$.

Alors $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$.

**Solution 1.** On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ la fonction de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $\arctan(x^n)$. Alors $f_n$ converge simplement sur $[0, 2]$ vers la fonction $f$ définie par $f(x) = 0$ si $0 \leqslant x < 1$, $f(1) = \frac{\pi}{4}$ et $f(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x > 1$. De plus, pour tout $n$, et pour tout $x$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}$ et, bien entendu, $x \mapsto \frac{\pi}{2}$ est continue et intégrable sur $[0, 2]$ donc, en vertu du théorème de convergence dominée, $(u_n)$ converge vers $\int_0^2 f = \frac{\pi}{2}$.

**Solution 2.** La convergence simple de $(f_n)$ vers la fonction exponentielle est immédiate. Une étude de fonction en revanche montre que $f_n - \exp$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. De ce fait, $(f_n)$ ne converge pas uniformément vers exp. En revanche, étant donné $a > 0$, on a clairement, pour tout $x \in [0, a]$, $|f_n(x) - \exp(x)| = \exp(x)\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \leqslant e^a\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$, or $e^a\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \to 0$ et donc si la convergence de $(f_n)$ vers exp n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$, elle l'est en revanche sur tout segment $[0, a]$.