

Programme de colles mathématiques PC

Semaine 13 du 15/12 au 19/12

1 Séries de fonctions

Modes de convergence d'une série de fonctions (simple, uniforme, normale). Régularité de la limite d'une série de fonction (continuité, caractère \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^k). Lien avec l'intégration.

2 Espaces préhilbertiens et euclidiens

Définition d'un produit scalaire, et exemples (produit scalaire canonique ou usuel de \mathbb{R}^n , de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$). Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée à un produit scalaire. Identités de polarisation et du parallélogramme.

Orthogonalité. Pythagore. Projection sur un sous-espace de dimension finie. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Définition d'un espace euclidien, existence de bases orthonormales.

Isométries vectorielles, exemple des symétries orthogonales.

Définition et caractérisation(s) d'une matrice orthogonale.

Isométries vectorielles du plan orienté.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques.

Théorème spectral. Matrices symétriques positives et définies positives.

Questions de cours : (énoncé et démonstration)

- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Identité de Pythagore et son application (une famille orthogonale formée de vecteurs tous non nuls est libre)
- Projeté orthogonal d'un vecteur x sur F sev de E muni de (e_1, \dots, e_n) orthonormale. (Thm 14)
- Caractérisation (P.30) des isométries vectorielles par la préservation du produit scalaire.
- Exercice type (4) : Une symétrie de E euclidien est autoadjointe si et seulement si elle est orthogonale.