

1 Espaces préhilbertiens et euclidiens

Définition d'un produit scalaire, et exemples (produit scalaire canonique ou usuel de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$). Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée à un produit scalaire. Identités de polarisation et du parallélogramme.

Orthogonalité. Pythagore. Projection sur un sous-espace de dimension finie. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Définition d'un espace euclidien, existence de bases orthonormales.

Isométries vectorielles, exemple des symétries orthogonales.

Définition et caractérisation(s) d'une matrice orthogonale.

Isométries vectorielles du plan orienté.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques.

Théorème spectral. Matrices symétriques positives et définies positives.

Questions de cours : (énoncé et démonstration)

- Projeté orthogonal d'un vecteur x sur F sev de E muni de $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale. (Thm 14)
- Caractérisation (P.30) des isométries vectorielles par la préservation du produit scalaire.
- Exercice type (4) : Une symétrie de E euclidien est autoadjointe si et seulement si elle est orthogonale.

2 Séries entières

Rayon de convergence d'une série entière. Recherche de rayon de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert. Rayon de convergence de la somme, combinaison linéaire et produit de séries entières.

Continuité de la somme. Dérivation et primitivation d'une série entière, caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $] -R, R[$ de convergence.

Fonction développable en série entière, série de Taylor de f en 0 pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Révision de première année : formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor.

DSE d'une fonction rationnelle (de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ en particulier), de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan x$ et de $\exp$ (sur $\mathbb{C}$).

Questions de cours :

- Lemme d'Abel (énoncé et démonstration bien sûr) et énoncé de la définition du rayon de convergence.
- Continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (P15+C16)
- DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$