Programme de colles mathématiques PC

Semaine 15 du 12/1 au 16/1

1 Séries entières

Rayon de convergence d'une série entière. Recherche de rayon de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert. Rayon de convergence de la somme, combinaison linéaire et produit de séries entières.

Continuité de la somme. Dérivation et primitivation d'une série entière, caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ de convergence.

Fonction développable en série entière, série de Taylor de f en 0 pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Révision de première année : formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor.

DSE d'une fonction rationnelle (de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ en particulier), de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan x$ et de exp (sur $\mathbb{C}$).

Questions de cours :

- Lemme d'Abel (énoncé et démonstration bien sûr) et énoncé de la définition du rayon de convergence.
- Continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (P15+C16)
- DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$
- DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (P.37 : énoncé et démonstration)

2 Révisions : équations différentielles linéaires

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 : méthode de résolution.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, et de second membre simple (de la forme $t \mapsto P(t)\, e^{\lambda t}$ ou d'une somme de termes de ce type)

Solutions d'équations différentielles développables en séries entières.

Application de la réduction à la résolution de systèmes linéaires d'équations différentielles (coefficients constants). Seul le cas où la matrice du système est diagonalisable a été étudié.

- Base de l'ensemble des solutions de $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ selon les racines de l'équation caractéristique. (Enoncé seul : théorèmes 9 et 11)