

Exercice 1.

1. Si $x \leq 0$, $(u_n(x))$ ne converge pas vers 0 donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum u_n(x)$ converge absolument. Ainsi $D = \mathbb{R}^{+*}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est décroissante sur D , et ainsi f est décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n\|_{[1, +\infty[} = u_n(1) = e^{-\sqrt{n}}$ et $\sum e^{-\sqrt{n}}$ est convergente, ce qui indique que $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
4. On pense au théorème de la double limite : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de limite nulle en $+\infty$, $\sum u_n$ convergeant uniformément vers f sur $[1, +\infty[$, alors f admet une limite finie en $+\infty$ laquelle est la somme de la série nulle, donc vaut 0.
5. Pour tout n , u_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} |u_n(x)| dx = \int_1^{+\infty} u_n(x) dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\sqrt{n}x} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

La série $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est assez clairement convergente (on peut encore noter que $\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$) et, de plus $\sum u_n$ converge simplement vers f sur $[1, +\infty[$, laquelle est continue par morceaux. Mais alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2.

1. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est bien sûr $\ln|u|$.
1. Il est clair que si $P \in E_n$, alors $P'' - 4XP'$ est un polynôme de degré au plus n (puisque P'' est de degré au plus $n-2$ et $4XP'$ est de degré au plus n) et ainsi f est une application de E_n dans lui-même. On établit sans peine que f est linéaire, et ainsi f est un endomorphisme de E_n .
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(X^k) = -4kX^k + k(k-1)X^{k-2}$ (en particulier $f(1) = 0$ et $f(X) = -4X$) et il vient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -8 & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -4n \end{pmatrix}$$

En particulier si $n=3$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

3. M étant triangulaire, son polynôme caractéristique est scindé, et ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. On voit ici que M admet donc $n+1$ valeurs propres distinctes (si on préfère, on raisonne sur son polynôme caractéristique qui est donc scindé à racines simples) et elle est alors diagonalisable (et ses $n+1$ espaces propres sont des droites vectorielles).

4. Soit $P = a_p X^p + \dots + a_0$ (où $a_p \neq 0$) un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . Alors $f(P)$ est de degré au plus p et le coefficient selon X^p de $f(P)$ vaut, d'après ce qui précède, $-4pa_p$. On en déduit que $\lambda = -4p = -4\deg(P)$.

5. Etant donné $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $-4p$ est, on l'a vu, une valeur propre de M (et donc aussi de f) de multiplicité 1. Il en résulte qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p dans $E_{-4p}(f)$ (pour l'existence : on part d'un polynôme non nul et on le rend unitaire en divisant par son coefficient dominant, et pour l'unicité, deux polynômes unitaires dans cette droite vectorielle sont associés, et forcément alors égaux).

De la question précédente, on déduit de plus que H_p est de degré p .

3. 1. $f(H_p') = H_p''' - 4XH_p'' = f(H_p)' + 4H_p' = -4pH_p' + 4H_p' = 4(1-p)H_p'$
2. H_p' est donc un vecteur propre associé à la valeur propre $-4(p-1)$, mais l'espace propre associé à cette valeur propre est la droite vectorielle engendrée par H_{p-1} et on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $H_p' = \alpha H_{p-1}$. En comparant les coefficients de degré $p-1$ on en déduit que $\alpha = p$.

De la relation $H_p'' - 4XH_p' + 4pH_p = 0$, et de ce que $H_p' = pH_{p-1}$ et $H_p'' = p(p-1)H_{p-2}$, il vient donc, si $p \geq 2$, en divisant par $4p$:

$$\frac{p-1}{4} H_{p-2} - XH_{p-1} + H_p = 0$$

3. Déjà $f(1) = 0$ et $f(X) = -4X$ et ainsi $H_0 = 1$ et $H_1 = X$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $H_2 = X^2 + \alpha$ car $H_2' = 2H_1 = 2X$, et $f(X^2 + \alpha) = -8X^2 + 2 = -8(X^2 + \alpha)$ si et seulement si $\alpha = -\frac{1}{4}$ et ainsi $H_2 = X^2 - \frac{1}{4}$.

Enfin, $H_3' = 3(X^2 - \frac{1}{4})$ et ainsi $H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X + \beta$ et $f(X^3 - \frac{3}{4}X + \beta) = -12X^3 + 6X + 3X = -12X^3 + 9X = -12(X^3 - \frac{3}{4}X + \beta)$ et ainsi $\beta = 0$ et $H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X$.

4. 1. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U d'après les théorèmes généraux, et $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) = 2x - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x}$ et $\frac{\partial G}{\partial x}(a, b, c) = 0$ si et seulement si $2a(a-b)(c-a) - (c-a) + (a-b) = 0$ ssi $2a(a-b)(a-c) = 2a-b-c$ et de même pour les deux autres équations.

2.1. $Q = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$.

2.2. $f(Q) = 2(X-a+X-b+X-c) - 4X((X-a)(X-b) + (X-a)(X-c) + (X-b)(X-c))$ et donc $f(Q)(a) = 2(2a-b-c) - 4a(a-b)(a-c)$ et on voit bien que $f(Q)(a) = 0$ si et seulement si L_1 est satisfaite.

3. Si (a, b, c) est critique, alors a, b, c sont racines de $f(Q)$, or $f(Q)$ est de degré 3 et de coefficient dominant -12 et de ce fait $f(Q) = -12(X-a)(X-b)(X-c) = -12Q$. (a, b et c sont bien sûr trois réels distincts)

4. De ce qui précède, $Q = H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X = (X-0)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. et les points critiques de G sont donc les triplets (a, b, c) tels que $\{a, b, c\} = \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (en pratique donc, 6 tels triplets)

Exercice 3. (proche, mais pas tout à fait le même que E3A 2025 PC)

1. $J^2 = n J$.
2. Ainsi, $J^0 = I_n$ et, pour $l > 0$, $J^l = n^{l-1} J$.
3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est manifestement une base de $\text{Im } J$ et le rang 1 de J s'en déduit.
4. Des relations $C_2 = C_1, C_3 = C_1, \dots, C_n = C_1$ (en notant $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de J , alors on déduit qu'une base de $\text{Ker } J$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
5. J est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral est diagonalisable selon une base orthonormée.
6. 0 est une valeur propre de J et l'espace propre associé $\text{Ker } J$ est de dimension $n - 1$. De plus, $JC = n C$ en notant $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ce qui indique que n est également une valeur propre, forcément simple, et d'espace propre associé $\text{Vect}(C) = \text{Im } J$.
7. J est donc semblable à $D = \text{diag}(0, \dots, 0, n)$.
8. De ce qui précède, on sait que les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et de somme $\mathbb{R}^n$. Ne s'agissant que de $\text{Ker } J$ et $\text{Im } J$, alors c'est donc que ces deux espaces sont des supplémentaires orthogonaux.
9. $M_r = r J + (1 - r) I_n$.
10. Les matrices I_n et J commutent et donc par la formule du binôme :

$$(M_r)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} r^l (1-r)^{k-l} J^l = (1-r)^k I_n + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} r^l (1-r)^{k-l} n^{l-1} J$$

et $\sum_{l=1}^k \binom{k}{l} r^l (1-r)^{k-l} n^{l-1} = \frac{1}{n} ((r+1-r)^k - (1-r)^k)$ donc $(\alpha_k, \beta_k) = ((1-r)^k, \frac{1}{n}(1 - (1-r)^k))$ convient.

11. Ici encore on peut remarquer que M_r est une matrice symétrique réelle.
12. En notant P une matrice de passage à une base de diagonalisation de J de sorte que $J = P D P^{-1}$, alors $P^{-1} M_r P = r D + (1-r) I_n = \text{diag}(r, \dots, r, r n + 1 - r) = \Delta_r$.
13. 1. De ce qui précède, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.
2. $\Delta_r = \text{diag}(r, r, 2r+1)$ et les solutions sont de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} a e^{rt} \\ b e^{rt} \\ c e^{(2r+1)t} \end{pmatrix}$
3. Les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto a e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c e^{(2r+1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$