

Exercice 2.

1. Une manière est d'utiliser la formule du binôme, une seconde est de remarquer que étant donné E un ensemble fini de n éléments, $\binom{n}{k}$ dénombre les combinaisons de k éléments de E et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ est alors le nombre de parties de E , lequel vaut, c'est bien connu, 2^n .
2. $(\{X=i\} \cap \{Y=j\})_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}$ constitue un système complet d'événements, et ainsi

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = 1$$

en d'autres termes, $\alpha 2^n \times 2^n = 1$ et donc $\alpha = \frac{1}{2^{2n}}$.

3. Il est classique d'obtenir les lois marginales (les lois de X et de Y) à partir de la loi du couple $(X, Y) : \{Y=1\}, \dots, \{Y=n+1\}$ formant un système complet d'événements, alors d'après la formule des probabilités totales, pour $1 \leq i \leq n+1$:

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \alpha \binom{n}{i-1} 2^n = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}$$

et on montre de même que $\mathbb{P}(X=j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1}$. On observe que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, alors $\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \mathbb{P}(X=i) \mathbb{P}(Y=j)$ ce qui montre que X et Y sont indépendantes.

4. $Z = X - 1$ suit la loi géométrique de paramètres $(n, \frac{1}{2})$, ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2} + 1$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n}{4}$.
5. A de cardinal $p+q$ peut être vu comme l'union disjointe de deux ensembles B et C de cardinaux respectifs p et q . On sait qu'il y a $\binom{p+q}{r}$ parties de r éléments de A , mais parmi ces telles parties, il y en a :

- $\binom{p}{0} \binom{q}{r}$ qui sont formées de 0 élément de B et r éléments de C
- $\binom{p}{1} \binom{q}{r-1}$ qui sont formées de 1 élément de B et $r-1$ éléments de C
- et ainsi de suite jusqu'à $\binom{p}{r} \binom{q}{0}$ formées de r éléments de B et 0 de C .

La formule attendue (dite de Vandermonde) s'en déduit.

6. On applique la formule précédente dans le cas où $p=q=r=n$, et on en déduit

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

7. 1. On voit qu'en posant $C = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}$, alors les colonnes de B sont $\alpha \binom{n}{0} C, \alpha \binom{n}{1} C, \dots, \alpha \binom{n}{n} C$ et bien sûr, le rang de 1 s'en déduit aussitôt.
2. La trace de B se déduit de la question 6 : on trouve $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$.

Exercice 3. On sait $\mathcal{S}_n$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\mathcal{A}_n$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

I.

1. $\mathcal{S}_2$ est on le sait de dimension 3 et constitué de matrices toutes diagonalisables en vertu du théorème spectral.

- Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ contenu dans $\mathcal{D}_2$ est ainsi de dimension au moins 3. Comme $\mathcal{M}_2$ n'est pas constitué de matrices toutes diagonalisables (par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est bien connu, n'est pas diagonalisable car admet une valeur propre double dont l'espace propre associé n'est que de dimension 1, ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'admet aucune valeur propre réelle), un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ qui ne serait formé que de matrices diagonalisables est forcément un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{M}_2$ et est donc de dimension au plus 3. 3 est donc la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ contenu dans $\mathcal{D}_2$.
- $\mathcal{D}_2$ contient strictement $\mathcal{S}_2$ (par exemple, il y a aussi dans $\mathcal{D}_2$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui n'est pas symétrique, mais qui est manifestement diagonalisable puisque son polynôme caractéristique $(X-1)(X-2)$ est scindé à racines simples (on peut noter, si on préfère, que cette matrice admet deux valeurs propres simples et qu'à ce titre elle est diagonalisable).

Mais alors, si $\mathcal{D}_2$ était un espace vectoriel, il ne pourrait s'agir que de $\mathcal{M}_2$ ce qui n'est pas, puisqu'il est des matrices de $\mathcal{M}_2$ qui ne sont pas diagonalisables. De ce fait, $\mathcal{D}_2$ n'est pas un espace vectoriel.

(Autre argument, plus proche peut-être de l'énoncé : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices linéairement indépendantes et toutes inversibles, donc si $\mathcal{D}_2$ était un espace vectoriel, il s'agirait de $\mathcal{M}_2$ tout entier, ce qui n'est pas)

- De ce qui précède, l'espace vectoriel qu'engendre $\mathcal{D}_2$ est $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2$ est ainsi le seul sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ contenant $\mathcal{D}_2$.
1. La fonction $f : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto (a-d)^2 + 4bc$ est continue et on sait qu'alors $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_2 | f(M) > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_2$.

Même raisonnement pour $F = \{M \in \mathcal{M}_2 | f(M) \geq 0\}$ qui forme donc un fermé de $\mathcal{M}_2$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$, alors le polynôme caractéristique de M , $X^2 - (a+d)X + ad - bc$ a pour discriminant $(a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc$. Mais alors, si M est diagonalisable, M admet au moins une valeur propre réelle et ainsi $(a-d)^2 + 4bc \geq 0$ (en cas d'égalité, on peut noter qu'alors M est forcément de la forme λI_2), et si $(a-d)^2 + 4bc > 0$, on sait que le polynôme caractéristique de M est alors scindé à racines simples ce qui prouve que M est diagonalisable. Les deux inclusions sont donc établies.

3. La suite $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices diagonalisables qui converge vers une matrice non diagonalisable, donc $\mathcal{D}_2$ n'est pas un fermé. Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$ mais pour tout $\varepsilon > 0$, $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{D}_2$ et donc sur tout voisinage de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ figurent des matrices non inversibles. Ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$ mais n'est pas un point intérieur à $\mathcal{D}_2$. Ceci établit que $\mathcal{D}_2$ n'est pas une partie ouverte de $\mathcal{M}_2$.

II.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. On voit que A admet deux valeurs propres simples que sont

1 et -1 et une troisième valeur propre 0 de multiplicité $n-2$. De plus, le rang de A vaut manifestement 2 et ainsi l'espace propre associé à 0 est de dimension $n-2$. Ceci établit que A est diagonalisable et un raisonnement analogue montre que B est diagonalisable.

2. $A+B$ n'est pas diagonalisable car on voit que 0 en est la seule valeur propre, de multiplicité n , mais que $A+B$ est de rang 1 et que donc l'espace propre associé à 0 n'est pas de dimension n , mais seulement $n-1$.

De ce fait, $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable par $+$ donc ne saurait être un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

- Soit N antisymétrique et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^t X N X$ est une matrice d'une ligne et colonne (qu'on peut identifier à un réel) qui est donc inchangée par transposition, or en transposant, comme ${}^t N = -N$ on trouve l'opposé. De ce fait ${}^t X N X = 0$.

Mais alors si λ est une valeur propre de N et $X \neq 0$ un vecteur propre associé, il vient $\lambda \|X\|^2 = 0$ et ainsi $\lambda = 0$.

- De ce qui précède, on voit que si $N \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{A}_n$, alors $N = 0$ puisque N est diagonalisable avec 0 pour seule valeur propre, ainsi N est semblable à la matrice nulle ce qui n'est possible que si, et seulement si, $N = 0$.

De ce fait, si S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_n$, alors $S \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.

En d'autres termes, S et $\mathcal{A}_n$ sont en somme directe, et on en déduit que $\dim(S) + \dim(\mathcal{A}_n) \leq \dim(\mathcal{M}_n)$. de ce fait il vient $\dim(S) \leq n^2 - \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

L'égalité est atteinte pour $S = \mathcal{S}_n$.

4. 1. f_P est assez clairement linéaire, et réalise une bijection car de bijection réciproque $M \mapsto PMP^{-1}$.

On en déduit que les espaces $\mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}_n$ sont isomorphes, et dont de même dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Toute matrice semblable à une matrice diagonalisable est encore semblable à une matrice diagonale et est donc diagonalisable à son tour. De ce fait $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n$.

3. L'inclusion de droite à gauche a été établie à la question précédente. Soit $M \in \mathcal{D}_n$, alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $PM P^{-1} = D$ soit diagonale. Mais alors D est symétrique, et $M \in \mathcal{S}_{P^{-1}}$ ce qui montre l'autre inclusion.

5. 1. $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ convient.

2. Il vient $P^{-1}T_{i,j}P = 2E_{j,i} + 2E_{i,j}$ qui est une matrice symétrique réelle et donc diagonalisable. $T_{i,j}$ semblable à une matrice diagonalisable est donc diagonalisable à son tour.

3. On justifie que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}_n$ sont d'intersection réduite à $\{0\}$ (une matrice élément de $\mathcal{T}$ a ses coefficients diagonaux nuls et ses coefficients à droite de la diagonale égaux à 4 fois ceux qui sont sous la diagonale, tandis qu'on a l'égalité pour les matrices symétriques, et une matrice de l'intersection est alors forcément la matrice nulle). On conclut par un argument de dimension, la dimension de $\mathcal{T}$ étant la dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ complémentaire de celle de $\mathcal{S}_n$.

On connaît une base de $\mathcal{S}_n$, et $(T_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ constitue une base de $\mathcal{T}$ formée de matrices toutes diagonalisables.

La réunion des deux forme donc une base de $\mathcal{M}_n$ formée de matrices toutes diagonalisables.

4. Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ contenant $\mathcal{D}_n$ contient alors une base de $\mathcal{M}_n$, et donc ne peut être que $\mathcal{M}_n$.

Exercice 4.

1. laissé au lecteur (tout le monde doit savoir faire ceci!)

2.

```
def ind(L):  
    output = []  
    for i in range(len(L)):  
        if L[i] != 0:  
            output.append(i)  
    return output
```

3.

```
def nb_oc(L):  
    T = [0] * (maxi(L)+1)  
    for x in L:  
        T[x] += 1  
    return T
```

4. 1. Deux fois : une pour maxi(L) et une seconde fois dans la boucle for.

2. Rien à faire ici.

5. 1. $L1 = [1, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 0]$ et cela ne bouge plus.

2. $[1, 2, 4, 4]$, $[1, 4, 2, 4]$ et 10 autres ordres...

3.

4.

```
def rob(A,n):  
    L = A  
    for k in range(n):  
        T=nb_oc(L)  
        I=ind(T)  
        L=[]  
        for i in I[::-1]:  
            L.append(T[i])  
            L.append(i)  
    return L
```