

EXERCICE 2.

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ , $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Déterminer la valeur du réel α .
3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y . Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X .
5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p + q$.

En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r , montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
7. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est : $b_{ij} = \mathbb{P}([(X, Y) = (i, j)])$.
 - 7.1. Déterminer le rang de la matrice B .
 - 7.2. Déterminer la valeur de $\text{tr}(B)$, la trace de la matrice B .

EXERCICE 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.

Dans tout l'exercice, une matrice de $\mathcal{M}_n$ est dite diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n$.

$\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n$.

Question de cours : Donner sans démonstration les dimensions des espaces vectoriels $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$.

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_2$ constitué de matrices diagonalisables.
2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ contenu dans $\mathcal{D}_2$.

3. $\mathcal{D}_2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$? Justifier.

On pourra utiliser des arguments de dimension.

4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2$ contenant $\mathcal{D}_2$.

5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 \mid (a-d)^2 + 4bc \geq 0 \right\}$.

5.1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2$.

5.2. Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathcal{D}_2 \subset F$

5.3. $\mathcal{D}_2$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2$? un ouvert de $\mathcal{M}_2$? Justifier.

Partie 2

On revient au cas général avec $n > 2$.

1. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ définies par :

- $a_{11} = a_{12} = 1, a_{22} = -1$ et $a_{ij} = 0$ sinon
- $b_{11} = -1, b_{12} = b_{22} = 1$ et $b_{ij} = 0$ sinon

1.1. Vérifier que A et B sont diagonalisables.

1.2. $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$? Justifier.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n$, antisymétrique.

Démontrer que l'ensemble des valeurs propres réelles de N est inclus dans $\{0\}$.

(On pourra calculer le produit matriciel tXNX pour un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

3. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ contenu dans $\mathcal{D}_n$. Déterminer $S \cap \mathcal{A}_n$.

En déduire la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel S . On donnera un exemple d'un sous-espace réalisant cette condition.

4. Soit une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On note f_P l'application linéaire qui à une matrice M de $\mathcal{M}_n$ associe la matrice $P^{-1}MP$.

4.1. Vérifier que f_P est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$ et expliciter f_P^{-1} .

En déduire la dimension de $\mathcal{S}_P = f_P(\mathcal{S}_n)$.

4.2. Prouver que l'on a : $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n$

4.3. Démontrer enfin que : $\mathcal{D}_n = \bigcup_{P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})} \mathcal{S}_P$

5. On note $\{E_{ij}, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n$ où E_{ij} est la matrice de $\mathcal{M}_n$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

5.1. Donner sans démonstration une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{S}_n$.

5.2. Pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i < j$, on pose $T_{ij} = 4E_{ji} + E_{ij}$.

Soit P la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$ où le 2 est à la j -ième position.

Décomposer la matrice $P^{-1}T_{ij}P$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n$. On pourra utiliser l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à T_{ij} .

Justifier alors que la matrice T_{ij} est diagonalisable.

5.3. Soit $\mathcal{T} = \text{Vect}(T_{ij}, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i < j)$. Prouver que $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_n$.

En déduire une base de $\mathcal{M}_n$ constituée de matrices toutes diagonalisables.

5.4. Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$ contenant $\mathcal{D}_n$.

EXERCICE 4.

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.

On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2. Ecrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices $[i_1, \dots, i_r]$ avec $i_1 < \dots < i_r$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $L[i_k]$ soit non nul.

Par exemple, si `L = [0, 1, 3, 0, 7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1, 2, 4]`.

3. Ecrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur

$M = \text{maxi}(L) + 1$ où, pour tout $i \in \llbracket 0, M \rrbracket$, $T[i]$ est le nombre d'occurrences dans la liste `L` de l'entier i .

Par exemple, si `L = [3, 1, 4, 1, 5]`, alors `T = [0, 2, 0, 1, 1, 1]`

On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4.

4.1. Soit `L` une liste d'entiers naturels. Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

4.2. On veut que `n` soit indépendant de `M`.

Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5. Soit `A` une liste d'entiers. On définit alors la suite de Robinson $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à la liste `A` par récurrence comme suit

– $L_0 = A$.

– Si L_n est construite, alors :

– on détermine $T_n = \text{nb_oc}(L_n)$.

– on détermine $I_n = \text{ind}(T_n)$.

– si $I_n = [i_1, \dots, i_r]$, alors $L_{n+1} = [T[i_r], i_r, \dots, T[i_1], i_1]$

Par exemple, si `A = [4, 4, 1, 2]` :

– $L_0 = [4, 4, 1, 2]$

– $L_1 = [2, 4, 1, 2, 1, 1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)

– $L_2 = [1, 4, 2, 2, 3, 1]$ (il y a un « 4 », deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

5.1. On donne `A = [2, 0, 4, 1, 3, 3, 2, 3, 1, 1]`. Déterminer L_3 et L_{2018} .

5.2. On donne `B = [2, 4, 1, 1, 1, 2]`. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0 .

5.3. On donne `C = [2, 4, 1, 0]`. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0 .

5.4. Proposer alors une fonction `rob(A, n)` qui prend en argument une liste `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément L_n de la suite de Robinson associée à `A`.