Suites récurrentes

Réponse 1. $(p-n+1)\frac{u_n+u_p}{2}$. (moyenne arithmétique du premier et du dernier terme de la somme multipliée par le nombre de termes)

Réponse 2. Ne pas oublier de discuter sur la raison q : si $q=1$, la somme vaut $(p-n+1)\,u_n$.

Si $q\neq 1$, alors la somme vaut $\frac{u_n-q\,u_p}{1-q}$ (premier terme - dernier terme $\times$ raison que divise 1 - raison...)

Réponse 3. C'est immédiat si $a=1$ bien sûr et, sinon, on commence par chercher une suite particulière solution, sous la forme d'une suite constante. Il ne peut s'agir alors bien sûr que de la suite $\left(\frac{b}{1-a}\right)$. En notant $c=\frac{b}{1-a}$, on remarque alors que (u_n) est solution de notre récurrence si et seulement si la suite $(v_n)=(u_n-c)$ est une suite géométrique de raison a, et on en déduit que l'ensemble des suites solution de notre récurrence est $\{(\lambda\,a^n+c)|\lambda\in\mathbb{K}\}$.

Réponse 4. On note $(*)$ l'équation $x^2=a\,x+b$ appelée équation caractéristique de la récurrence.

- Si $(*)$ admet deux racines distinctes $\alpha\neq\beta$ dans $\mathbb{K}$, alors l'ensemble des suites solutions est $\{\lambda\,(\alpha^n)+\mu\,(\beta^n)|(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\}$.
- Si $(*)$ admet une racine double α dans $\mathbb{K}$, alors l'ensemble des suites est $\{\lambda\,(\alpha^n)+\mu\,(n\,\alpha^n)|(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\}$.
- Si $(*)$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes α et $\overline{\alpha}$, alors en notant $\rho=|\alpha|$ et θ un argument de α, l'ensemble des suites est $\{\lambda\,(\rho^n\cos(n\,\theta))+\mu\,(\rho^n\sin(n\,\theta))|(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

Réponse 5. Si $u_0\leqslant\alpha$, alors des variations de f, on déduit que $f(]-\infty,\alpha])\subset]-\infty,\alpha]$ (ce qui exprime que $]-\infty,\alpha]$ est stable par f) et il en résulte que $\forall n\in\mathbb{N},u_n\in]-\infty,\alpha]$ (première étape importante : on localise les termes de la suite (u_n), car ce n'est qu'alors qu'on peut tirer parti du tableau de signes de $x\mapsto f(x)-x$)

Du tableau de signes de $x\mapsto f(x)-x$ on déduit que la suite (u_n) est croissante. Majorée par α, elle converge de limite l telle que $u_0\leqslant l\leqslant\alpha$. De plus f est continue en l et donc $f(l)=l$. On en déduit que $l=\alpha$.

Si $\alpha\leqslant u_0<\beta$, un raisonnement analogue établit que (u_n) est une suite décroissante, convergente de limite α.

Si $u_0=\beta$, alors pour tout n, $u_n=\beta$.

Si $u_0>\beta$, alors de la croissance de f on déduit encore que $f([\beta,+\infty[)\subset[\beta,+\infty[$, et ainsi pour tout n, $u_n\geqslant\beta$. Du tableau de signe de $x\mapsto f(x)-x$ on en déduit que (u_n) est croissante. On raisonne par l'absurde en supposant (u_n) convergente, de limite l. On aurait alors $\beta<u_0\leqslant l$ et, de plus, comme f est continue en l, $f(l)=l$ ce qui est impossible. Donc, par l'absurde, (u_n) diverge vers $+\infty$.

Solution 1. L'équation caractéristique de la récurrence $x^2-2\cos(\theta)\,x+1=0$ a pour racines $e^{\mathrm{i}\theta}$ et $e^{-\mathrm{i}\theta}$ et l'ensemble des suites solutions s'en déduit $\{\lambda\,(\cos(n\,\theta))+\mu\,(\sin(n\,\theta))|(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

Solution 2. Pour $u_{n+1}=2\,u_n+1$, c'est de l'arithmético-géométrique, on trouve les suites $(-1+\lambda\,2^n)$ où $\lambda\in\mathbb{K}$.

Pour la seconde, on cherche une suite particulière solution de la récurrence sous la forme $(\lambda\,2^n)$, on remplace et il vient que λ convient si et seulement si $\lambda=-1$.

On voit alors que (u_n) est solution de notre récurrence si et seulement si (u_n+2^n) est géométrique de raison 3 et les suites solutions sont les suites de la forme $(-2^n+\lambda\,3^n)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Pour la dernière, la recherche d'une solution particulière sous la forme (2^n) échoue, alors on tente $(\lambda\,n\,2^n)$ (pourquoi pas ? on pense à la recherche d'une solution particulière de $y'=a\,y+C\,e^{at}$, et on trouve bien vite $t\mapsto C\,t\,e^{at}$ qui convient)

On remplace et on voit que $\lambda=\frac{1}{2}$ et les suites solutions prennent la forme $(n\,2^{n-1}+\lambda\,2^n)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.