

Filtrage de signaux périodiques

I. Décomposition en signaux périodiques

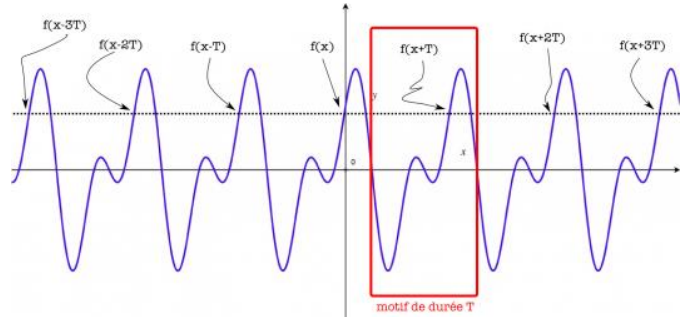
1. Série de Fourier complexe

Soit $f(t)$ une fonction continue par morceaux périodique de période T :

$$\forall t : f(t + T) = f(t)$$

On pose $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{avec } \underline{c}_n \in \mathbb{C}$$



Alors, en calculant l'intégrale :

$$I_n = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} \underline{c}_{n'} e^{i(n'-n)\omega_0 t} dt}_{=0 \text{ sauf pour } n'=n} = \underline{c}_n T$$

Et en changeant les bornes de l'intégrale, on :

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

2. Série de Fourier réelle

Si $f(t)$ est réelle :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{-in\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\underline{c}_n e^{in\omega_0 t} + \underline{c}_{-n} e^{-in\omega_0 t})$$

$$\Rightarrow f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\underline{c}_n + \underline{c}_{-n}) \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} i(\underline{c}_n - \underline{c}_{-n}) \sin(n\omega_0 t)$$

D'où :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

Avec la **valeur moyenne** : $a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \langle f(t) \rangle$

Et :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Définitions :

On appelle **harmonique de rang n** le terme : $f_n(t) = a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$

L'harmonique de rang 1 est le **fondamental** : $f_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t$

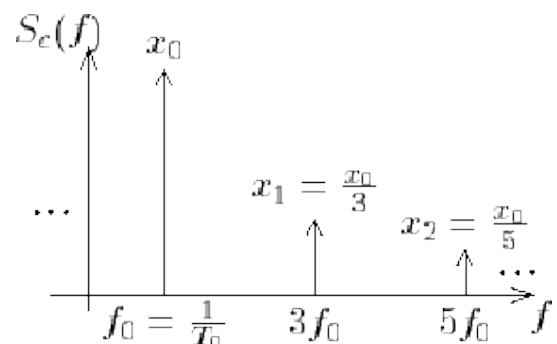
On appelle **amplitude** de la composante de rang n , le nombre :

$$V_n = |\underline{c}_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Le **spectre** de $f(t)$ est la représentation des amplitudes V_n en fonction des fréquences f_n ou du rang n .

Propriétés :

Si $f(t)$ est paire : $\forall n : b_n = 0$ Si $f(t)$ est impaire : $\forall n : a_n = 0$ et $a_0 = 0$



Autre forme possible :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 |c_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad \text{avec } \varphi_n = \text{Arg}(c_n)$$

3. Théorème de Parseval

Valeur moyenne de $f(t)^2$ pour $f(t)$ réelle :

$$\langle f(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right)^2 dt$$

Seule l'intégrale des termes de rang nul (c_0^2) ou produit de rang opposée ($2 c_n c_{-n} = 2 |c_n|^2$) donne des termes non nuls, alors :

$$\langle f(t)^2 \rangle = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 |c_n|^2$$

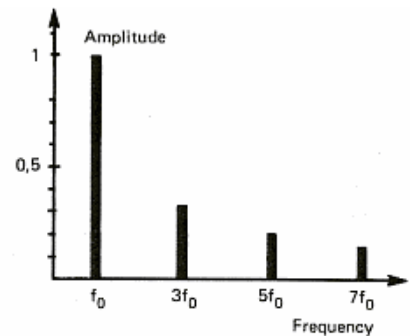
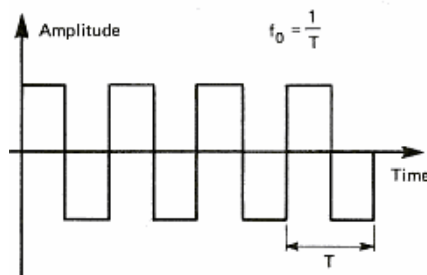
La puissance du signal est la somme des puissances de chaque terme.

4. Exemples

Signal carré impair d'amplitude V_0

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } kT \leq t < (k + 1/2)T \\ -V_0 & \text{pour } (k + 1/2)T \leq t < (k + 1)T \end{cases}$$

Comme la fonction est impaire, la moyenne est nulle et : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.



De plus, $f(-t) = -f(t)$, d'où :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T -f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

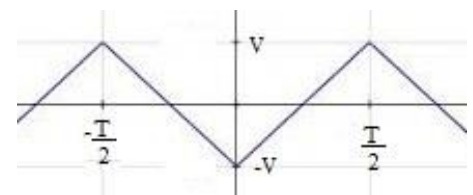
$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{4V_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt = \frac{4V_0}{T} \cdot \frac{T}{2\pi n} \left[-\cos \frac{2\pi n t}{T} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2V_0}{\pi n} (1 - \cos n\pi)$$

$$\text{or } \cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2p \text{ pair} \\ -1, & \text{si } n = 2p + 1 \text{ impair} \end{cases} \Rightarrow b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{4V_0}{(2p+1)\pi}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)\omega_0 t]}{2p+1}$$

Signal triangulaire symétrique (pair)

$$f(t) = \begin{cases} -V_0 \left(1 + \frac{4t}{T}\right) & \text{pour } \left(k - \frac{1}{2}\right)T \leq t < kT \\ V_0 \left(\frac{4t}{T} - 1\right) & \text{pour } kT \leq t < \left(k + \frac{1}{2}\right)T \end{cases}$$



La fonction est paire et de moyenne nulle donc : $\forall n, b_n = 0, a_0 = 0$ et :

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_0 \left(\frac{4t}{T} - 1\right) \cos n\omega_0 t dt = \frac{16V_0}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos n\omega_0 t dt - \frac{4V_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt$$

$$a_n = \frac{16V_0}{T^2} \left(\left[\frac{t \sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} dt \right) - \frac{4V_0}{T} \left[\frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$a_n = \frac{16V_0}{T^2} \left(\frac{T \sin n\pi}{2 n\omega_0} - 0 + \frac{\cos n\pi}{(n\omega_0)^2} - \frac{\cos 0}{(n\omega_0)^2} \right) - \frac{4V_0}{T n\omega_0} (\sin n\pi - \sin 0) = \frac{4V_0}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1)$$

Alors pour n pair : $a_{2p} = 0$ et pour n impair : $a_{2p+1} = -\frac{8V_0}{\pi^2 (2p+1)^2}$ d'où :

$$f(t) = -\frac{8V_0}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \cos \frac{[(2p+1)\omega_0 t]}{(2p+1)^2}$$

II Transformée de Fourier*

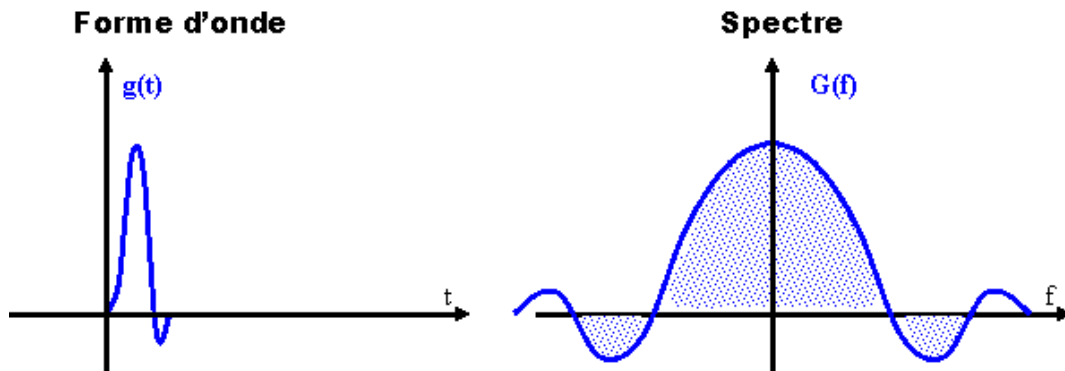
Pour f non périodique, on considère la fonction comme périodique de période $T \rightarrow \infty$ et $\omega_0 = 2\pi/T \rightarrow 0$ d'où :

$$\begin{cases} \omega_0 \rightarrow d\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ infinitésimal} \\ n\omega_0 \rightarrow \omega \text{ variant continuellement} \end{cases} \text{ alors :}$$

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega) \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{On a alors : } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \text{ avec } F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Le spectre est alors une fonction continue.



Exemple

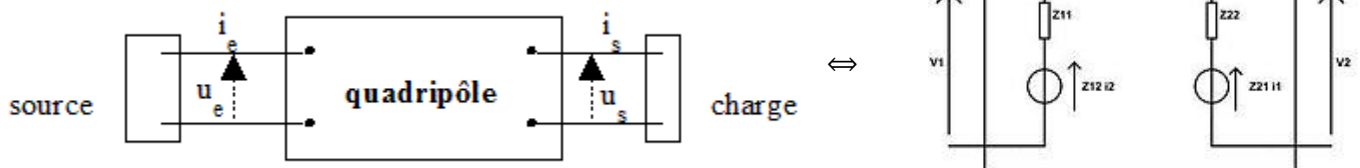
$$\text{Pour } f(t) = \begin{cases} A e^{i\Omega t} & \text{si } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{i(\Omega-\omega)t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i(\Omega-\omega)\frac{\tau}{2}} - e^{-i(\Omega-\omega)\frac{\tau}{2}}}{i(\Omega-\omega)} = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left[(\Omega-\omega)\frac{\tau}{2}\right]}{\Omega-\omega} = \frac{\tau A}{\sqrt{2\pi}} \text{sin}_c\left[(\Omega-\omega)\frac{\tau}{2}\right]$$

Les points d'annulation sont donnés par : $(\Omega - \omega_{1,2}) \frac{\tau}{2} = \pm\pi \Rightarrow \omega_{1,2} = \Omega \mp \frac{2\pi}{\tau}$

III Filtre linéaire

1. Quadripôle



Un **quadripôle** est un élément de circuit à 4 bornes, il est dit **actif** s'il comporte une source (auxiliaire) de puissance électrique, **passif** sinon. Si les grandeurs d'entrée (u_e, i_e) et de sortie (u_s, i_s) sont reliées par des équations différentielles, linéaires, homogènes à coefficients constants, le quadripôle est dit **linéaire**.

Impédance d'entrée

L'entrée du quadripôle peut-être modélisée par un générateur de Thévenin (de force électromotrice $f.é.m.$ nulle) : $u_e = Z_e i_e$

$$\Rightarrow \boxed{Z_e = \frac{u_e}{i_e}}$$

Impédance de sortie

La sortie du quadripôle donne avec un modèle de Thévenin ($f.é.m.$ e_s et impédance de sortie Z_s) : $\boxed{u_s = e_s - Z_s i_s}$

2. Linéarité

En conséquence de la linéarité des équations différentielles régissant le quadripôle, en notant $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie, on a les propriétés suivantes :

- Linéarité : $e(t) \rightarrow s(t)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ e'(t) = \lambda e(t) \rightarrow s'(t) = \lambda s(t)$
- Principe de superposition : pour deux excitations $e_{1,2}(t) \rightarrow s_{1,2}(t)$, $e(t) = e_1(t) + e_2(t) \rightarrow s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

3. Fonction de transfert

En régime sinusoïdal forcé, en notant I et U les grandeurs efficaces, I_m et U_m les amplitudes maximales, on a :

$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_I) \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_U) \end{cases}$$

En notation complexe ($j^2 = -1$), on a :
$$\begin{cases} \underline{i} = \sqrt{2} I \exp j(\omega t + \varphi_I) , & i = \text{Re}(\underline{i}) \\ \underline{u} = \sqrt{2} U \exp j(\omega t + \varphi_U) , & u = \text{Re}(\underline{u}) \end{cases}$$

Après le régime transitoire, en prenant l'origine de la phase de la tension d'entrée nulle, on a :
$$\begin{cases} \underline{V}_e = V_e \exp j\omega t \\ \underline{V}_s = V_s \exp j(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

On définit alors la fonction de transfert :
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = |\underline{H}(\omega)| \exp j\varphi(\omega)$$
, son module $|\underline{H}| = \left| \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \right|$ et son argument φ .

Exemple

Soit l'équation entre tension d'entrée V_e et de sortie V_s :

$$\begin{aligned} a_0 v_e + a_1 \frac{dv_e}{dt} + a_2 \frac{d^2 v_e}{dt^2} + \dots &= b_0 v_s + b_1 \frac{dv_s}{dt} + b_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \dots \\ \rightarrow a_0 v_e + a_1 j\omega v_e + a_2 (j\omega)^2 v_e + \dots &= b_0 v_s + b_1 j\omega v_s + b_2 (j\omega)^2 v_s \quad (\otimes) \\ \Rightarrow \underline{H} &= \frac{a_0 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2 + \dots}{b_0 + j\omega b_1 - \omega^2 b_2 + \dots} \end{aligned}$$

Stabilité le système est stable si
$$e(t > t_0) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$$

Pour que les solutions de (\otimes) soient en exponentielles décroissantes, il faut que les parties réelles des racines de l'équation caractéristique (\otimes) soient négatives.

4. Gain et phase

Gain en déciBell : $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$ et **phase** $\varphi = \text{Arg}(\underline{H})$

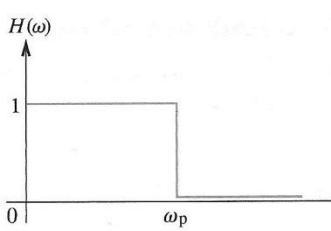
Le **diagramme de Bode** est l'ensemble des courbes de gain et de phase en fonction de $\log \omega$.

La **bande passante** à 3 dB est l'ensemble des fréquences ou des pulsations telles que $G_{dB} \geq G_{max} - 3dB \Leftrightarrow |\underline{H}| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

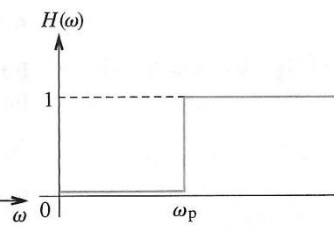
Cela permet de définir la **pulsation de coupure**.

IV Filtre linéaire du 1^{er} et du 2nd ordre

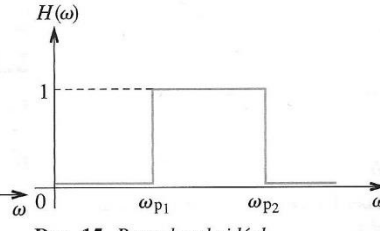
1. Filtres idéals et réels



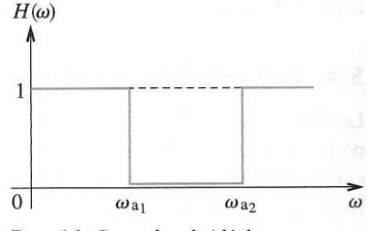
Doc. 13. Passe-bas idéal.



Doc. 14. Passe-haut idéal.



Doc. 15. Passe-bande idéal.

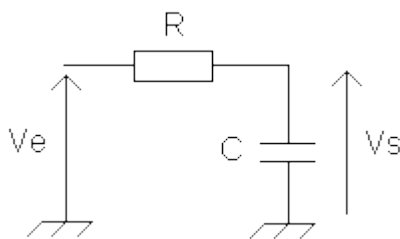


Doc. 16. Coupe-bande idéal.

On cherche à réaliser ces différents filtres à l'aide des éléments suivants :

2. Filtres passe-bas d'ordre 1

Réalisation



Avec un pont diviseur de tension, on a :

$$i = \frac{V_E}{Z_R + Z_C} = \frac{V_S}{Z_C} \Rightarrow V_S = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} V_E = \frac{1}{1 + Z_R Y_C} V_E \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On pose alors : $\tau = RC$, $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ et $\omega_c = \frac{1}{RC}$ alors :

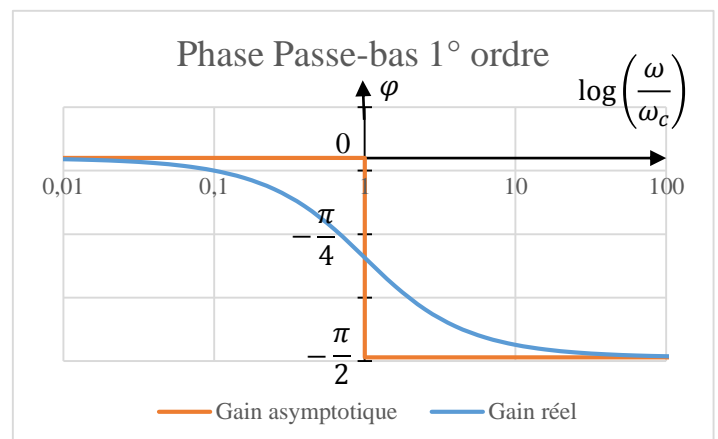
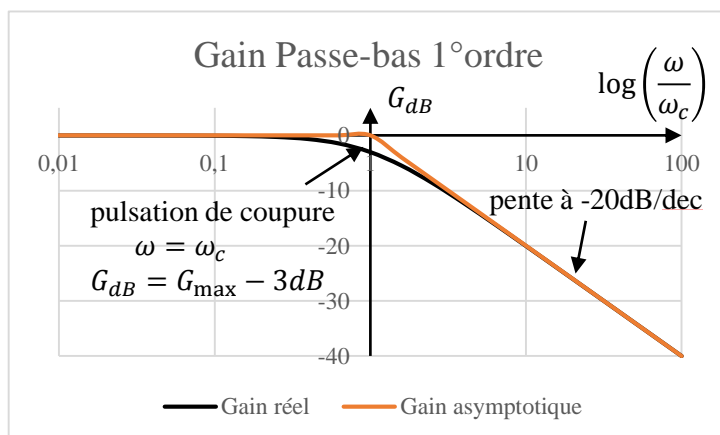
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Gain $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = -10 \log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]$

Phase $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}) = -\text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) [2\pi]$

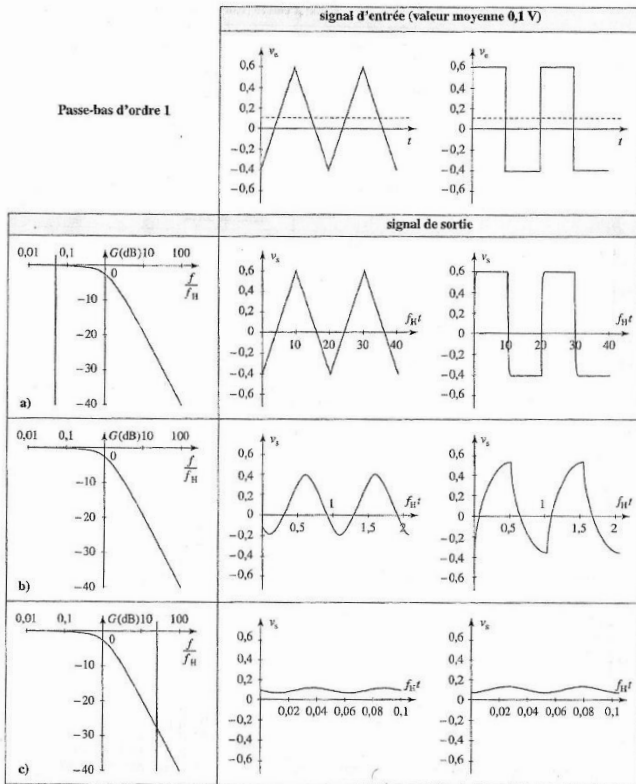
Diagramme asymptotique

$$\blacksquare \omega \ll \omega_c \Rightarrow \begin{cases} G \approx 0 \\ \varphi \approx 0 \end{cases} \quad \blacksquare \omega \gg \omega_c \Rightarrow \begin{cases} G \approx -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ \varphi \approx -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

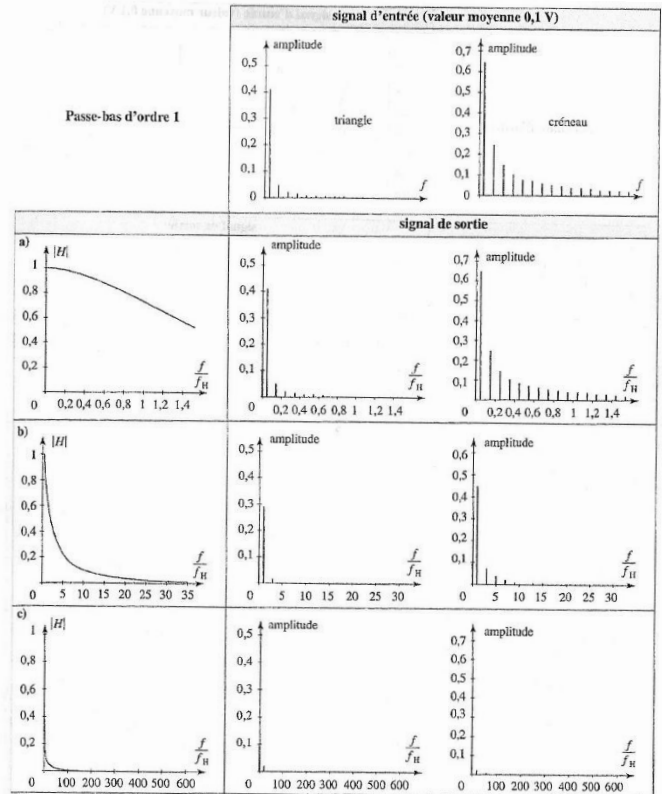


La composante continue et les basses fréquences sont transmises sans altération, à haute fréquence, le signal est atténué et le filtre se comporte comme un **intégrateur** :

$$\underline{H}(\omega \gg \omega_c) = \frac{V_S}{V_E} \approx H_0 \frac{\omega_c}{j\omega} \Rightarrow \frac{j\omega}{\omega_c} V_S \approx H_0 V_E \Rightarrow \frac{1}{\omega_c} \frac{dV_S}{dt} \approx H_0 V_E$$



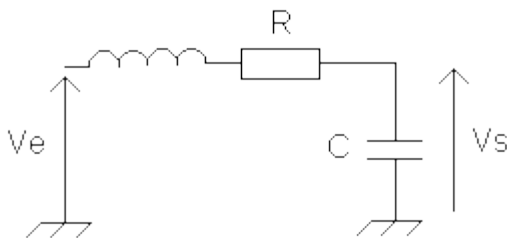
Doc. 36a. $f = \frac{f_H}{20}$: signal dans la bande passante. Le signal de sortie est transmis sans déformation importante sauf au niveau des discontinuités du créneau. b. $f = f_H$: signal en limite de bande passante. Le signal de sortie est fortement déformé. Sa valeur moyenne (0,1 V) est identique à celle du signal d'entrée. c. $f = 20f_H$: signal hors de la bande passante. L'ondulation du signal de sortie est très faible. Seule la composante continue est transmise sans atténuation.



Doc. 37a. $f = \frac{f_H}{20}$: Seuls les harmoniques de rang élevé sont atténués. Ceci explique la déformation du signal de sortie au niveau des discontinuités. b. $f = f_H$: Seuls la composante continue et quelques harmoniques sont transmis. Le signal de sortie est très déformé. c. $f = 20f_H$: Seule la composante continue est transmise. Les différents harmoniques sont très atténués.

3. Filtrage passe-bas d'ordre 2

Réalisation



Avec un pont diviseur de tension, on a :

$$V_S = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} V_E = \frac{1}{1 + Z_R Y_C + Z_L Y_C} V_E \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On pose alors : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{C}$ alors :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Gain $G_{dB} = -10 \log \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$

Phase $\varphi = -\text{Arctan} \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = -\text{Arctan} \left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$

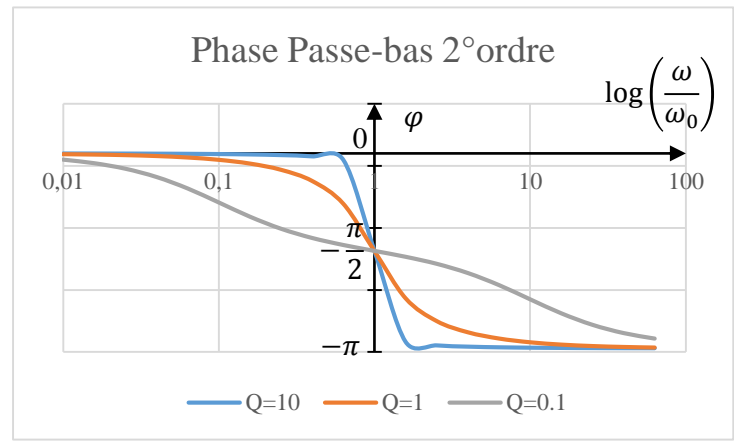
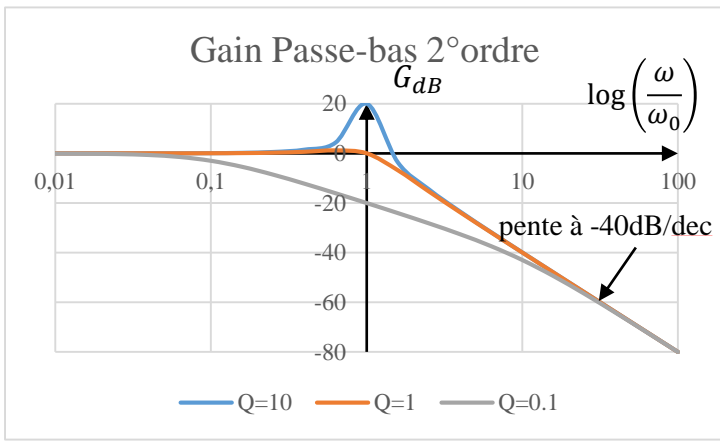
Diagramme asymptotique

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 \\ \omega \ll Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \approx 0 \\ \varphi \approx 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega \gg \omega_0 \\ \omega \gg Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \\ \varphi \approx -\pi \text{ [} 2\pi \text{]} (\varphi \in \mathbb{R}^*) \end{cases}$$

- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ le gain est inférieur à la valeur asymptotique
- Si $\frac{1}{\sqrt{2}} < Q < 1$, le gain est proche de la valeur asymptotique
- Si $Q > 1$, le gain est supérieur à la valeur asymptotique (risque de surtension aux bornes de C)

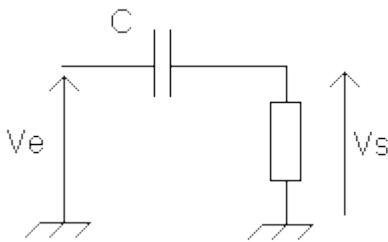
À haute fréquence, le signal est atténué et le filtre se comporte comme un **intégrateur** :

$$\underline{H}(\omega \gg \omega_0) = \frac{V_S}{V_E} \approx -H_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 V_S \approx H_0 V_E \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 V_S(t)}{dt^2} \approx H_0 V_E(t)$$



4. Filtres passe-haut d'ordre 1

Réalisation



Avec un pont diviseur de tension, on a :

$$V_S = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} V_E = \frac{Z_R Y_C}{1 + Z_R Y_C} V_E \Rightarrow \underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \text{ d'où avec } \omega_c = \frac{1}{RC} :$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

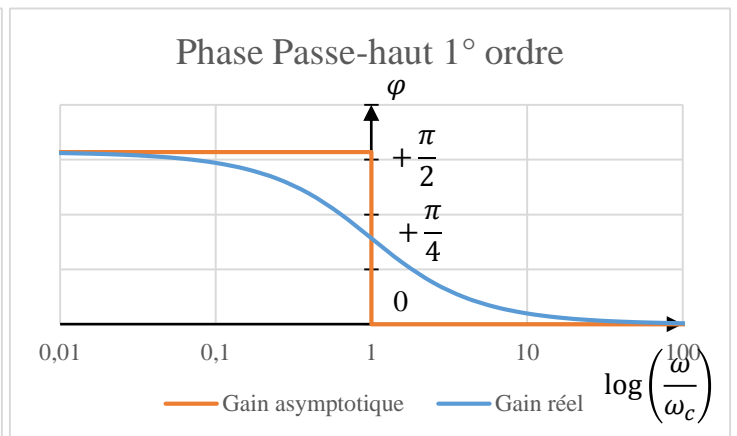
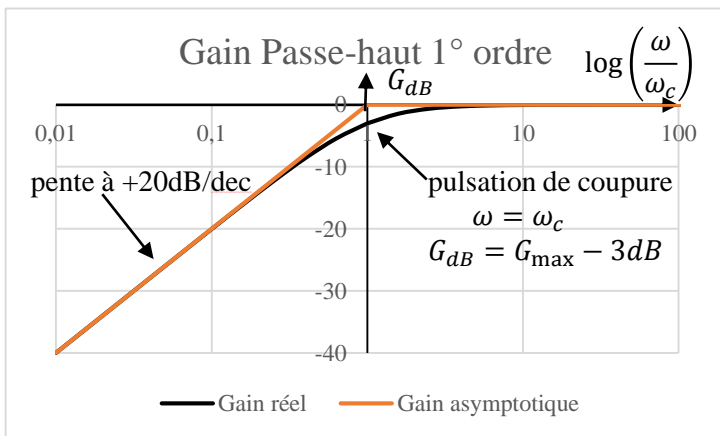
Gain $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right) = 20 \log \frac{\omega}{\omega_c} - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right]$

Phase $\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$

Diagramme asymptotique

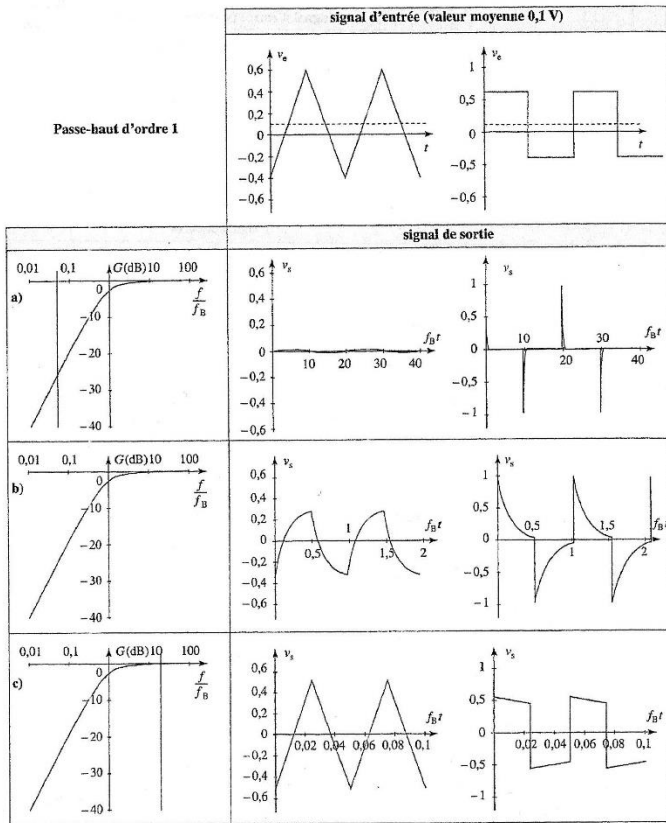
$$\blacksquare \omega \ll \omega_c \Rightarrow \begin{cases} G \approx 20 \log \frac{\omega}{\omega_c} \\ \varphi \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\blacksquare \omega \gg \omega_c \Rightarrow \begin{cases} G \approx 0 \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$$

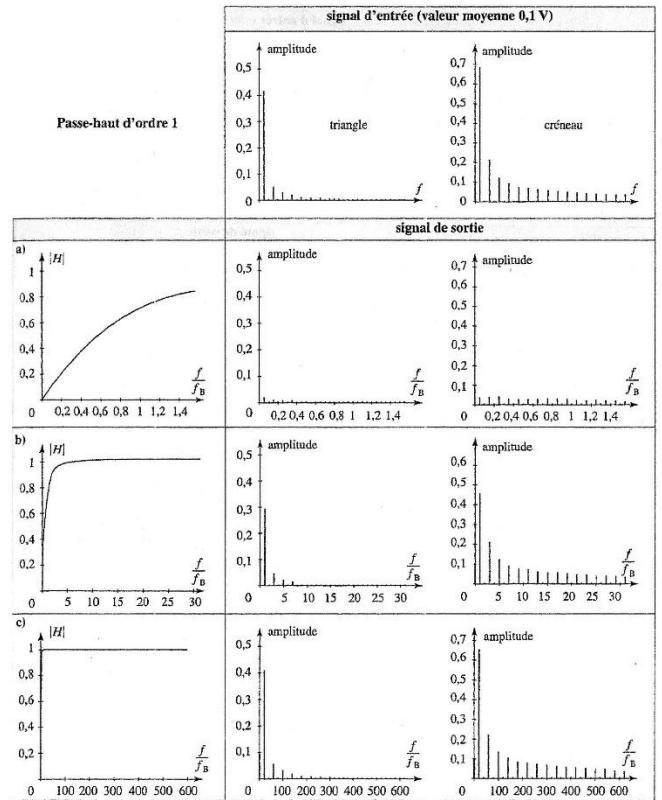


À basse fréquence, le signal est atténué et le filtre se comporte comme un **dérivateur** :

$$\underline{H}(\omega \ll \omega_c) = \frac{V_S}{V_E} \approx jH_0 \frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow V_S \approx H_0 \frac{j\omega}{\omega_c} V_E \Rightarrow V_S(t) \approx \frac{H_0}{\omega_c} \frac{dV_E(t)}{dt}$$



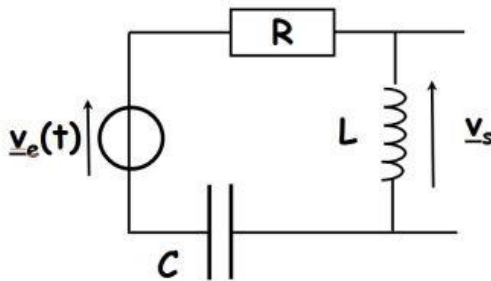
Doc. 38a. $f = \frac{f_B}{20}$: signal hors de la bande passante. Le signal de sortie n'est pas transmis. Il ne reste que des pics d'amplitude 1 V au niveau des discontinuités du signal crêteau. b. $f = f_B$: signal en limite de bande passante. Le signal est fortement déformé. Sa valeur moyenne est nulle. Le signal correspondant au crêteau conserve des discontinuités de 1 V du signal d'entrée. c. $f = 20f_B$: signal dans la bande passante. Le signal est voisin de la composante variable du signal d'entrée.



Doc. 39a. $f = \frac{f_B}{20}$: Seuls les harmoniques de rang élevé sont atténués. Ils créent l'impulsion d'amplitude 1 V dans le cas du crêteau. b. $f = f_B$: La composante continue est éliminée et le fondamental est atténué. Le signal de sortie est très déformé. c. $f = 20f_B$: Seule la composante continue est éliminée. Le signal de sortie correspond à la composante variable du signal d'entrée. Sa déformation est due au déphasage introduit par le filtre.

5. Filtrés passe-haut d'ordre 2

Réalisation



Avec un pont diviseur de tension, on a :

$$V_S = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L + Z_C} V_E = \frac{Y_C Z_L}{1 + Z_R Y_C + Z_L Y_C} V_E \Rightarrow H = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ il vient :
$$H(\omega) = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

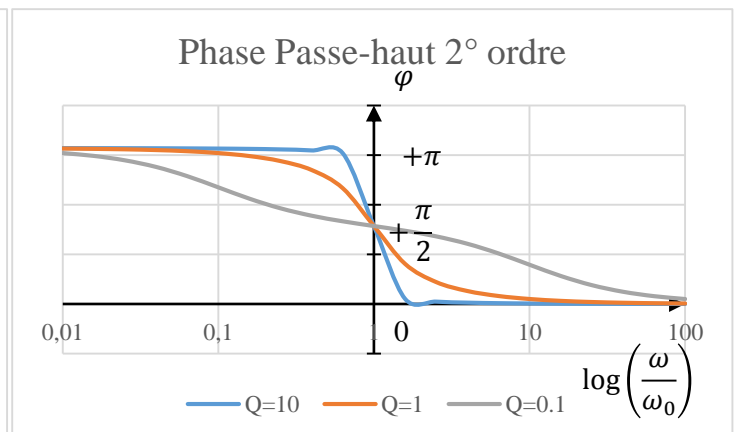
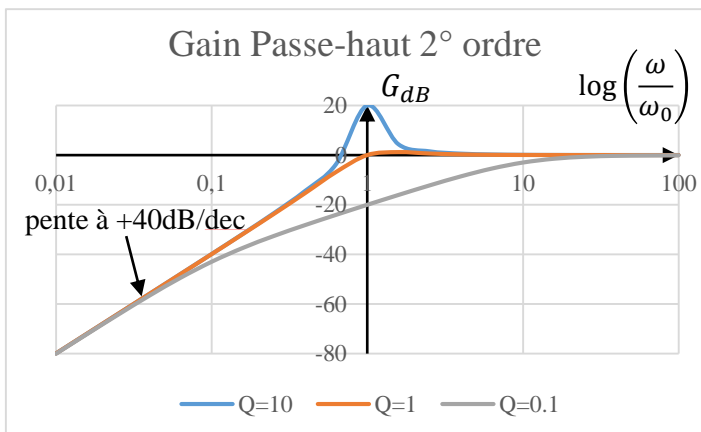
Gain $G_{dB} = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - 10 \log\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$

Phase $\varphi = \pi - \text{Arctan}\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Diagramme asymptotique

■ $\left\{ \begin{array}{l} \omega \ll \omega_0 \\ \omega \ll Q\omega_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \approx 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \varphi \approx \pi [2\pi] \quad (\varphi \in \mathbb{R}^{\pm}) \end{array} \right.$

■ $\left\{ \begin{array}{l} \omega \gg \omega_0 \\ \omega \gg Q\omega_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \approx 0 \\ \varphi \approx 0 \end{array} \right.$



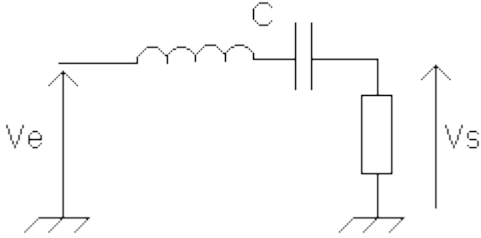
- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, le gain est inférieur à la valeur asymptotique
- Si $\frac{1}{\sqrt{2}} < Q < 1$, le gain est proche de la valeur asymptotique
- Si $Q > 1$, le gain est supérieur à la valeur asymptotique (risque de surtension aux bornes de L)

À basse fréquence, le signal est atténué et le filtre se comporte comme un **dérivateur** :

$$\underline{H}(\omega \ll \omega_0) = \frac{V_S}{V_E} \approx -H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow V_S \approx H_0 \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 V_E \Rightarrow V_S(t) \approx \frac{H_0}{\omega_0^2} \frac{d^2 V_E(t)}{dt^2}$$

6. Filtres passe-bande d'ordre 2

Réalisation



Avec un pont diviseur de tension, on a :

$$V_S = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C} V_E = \frac{Y_C Z_R}{1 + Z_R Y_C + Z_L Y_C} V_E \Rightarrow \underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ il vient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Si $Q \leq \frac{1}{2}$, la fonction de transfert est factorisable avec $\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$, et on a $\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} H_0}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$

On se ramène au produit de deux fonctions de transfert associée à un filtre passe-bas d'ordre 1 et passe-haut d'ordre 1 en cascade.

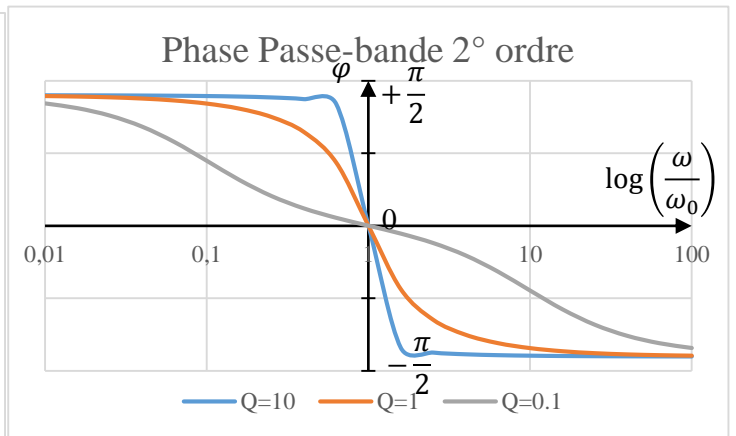
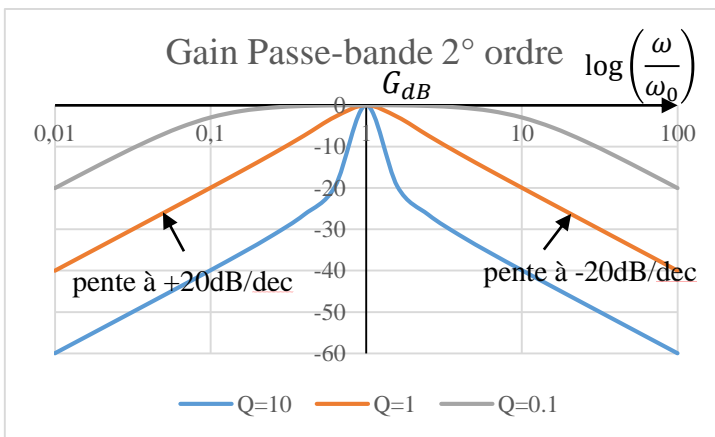
Gain $G_{dB} = -10 \log \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$

Phase $\varphi = -\text{Arctan} \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$

Diagramme asymptotique : on pose $\omega_1 = Q\omega_0$ et $\omega_2 = \omega_0/Q$

Si $Q < 1$: $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ et si $Q > 1$: $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$

- Pour $\omega \ll \min(\omega_1, \omega_2)$: $G \approx 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$
- Pour $\omega = \omega_0$: $G \approx 0$ et $\varphi \approx 0$
- Pour $\omega \gg \max(\omega_1, \omega_2)$: $G \approx -20 \log \frac{\omega}{\omega_2}$ et $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$



À basse fréquence, le signal est atténué et le filtre se comporte comme un **dérivateur** :

$$\underline{H}(\omega \ll \omega_0) = \frac{V_S}{V_E} \approx \frac{H_0 j\omega}{Q \omega_0} \Rightarrow V_S \approx \frac{H_0 j\omega}{Q \omega_0} V_E \Rightarrow V_S(t) \approx \frac{H_0}{Q \omega_0} \frac{dV_E(t)}{dt}$$

À haute fréquence, le signal est atténué et le filtre se comporte comme un **intégrateur** :

$$\underline{H}(\omega \gg \omega_0) = \frac{V_S}{V_E} \approx \frac{H_0 \omega_0}{Q j\omega} \Rightarrow \frac{j\omega Q}{\omega_0} V_S \approx H_0 V_E \Rightarrow \frac{Q}{\omega_0} \frac{dV_S(t)}{dt} \approx H_0 V_E(t)$$

Largeur de la bande passante à -3 dB

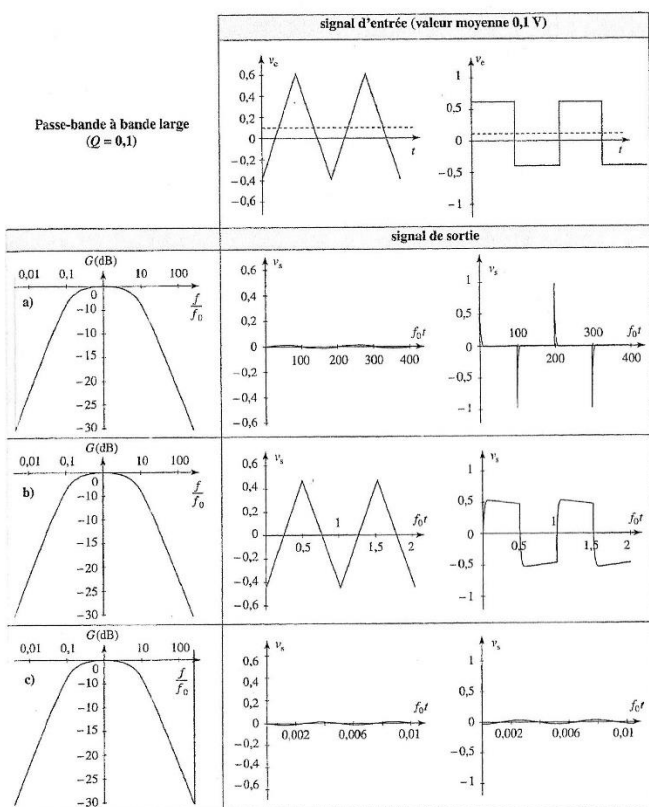
On définit la pulsation de coupure ω_c par : $|H(\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$ ici $H_{\max} = 1$, d'où pour $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on a :

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

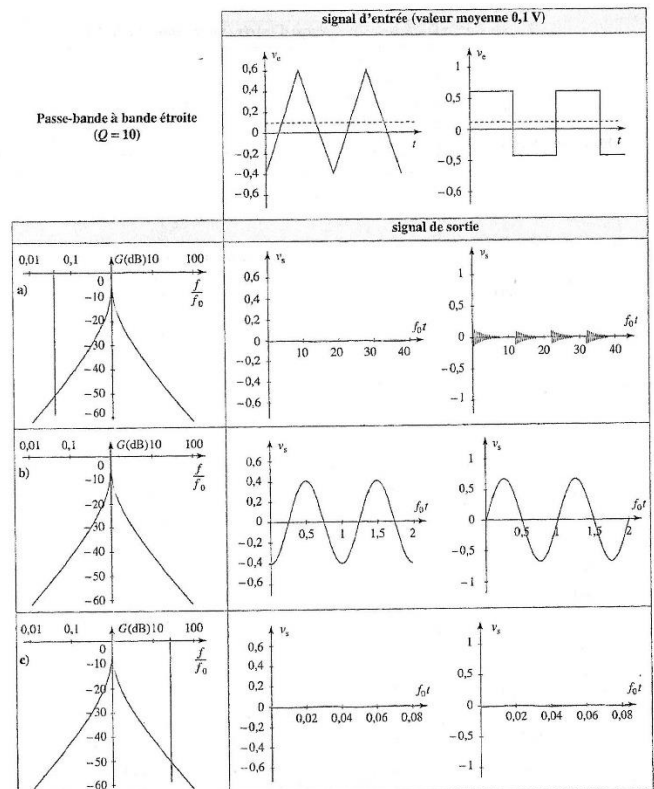
À la fréquence de coupure : $1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \Rightarrow Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \Rightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0 \Rightarrow x_{c1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$

D'où : $\Delta x = x_{c2} - x_{c1} = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$

Effet d'un filtre passe-bande sur un signal créneau V_E de fréquence f_E



Doc. 41a. $f = \frac{f_0}{20}$: signal hors dans la bande passante. Le signal n'est pas transmis. Il ne reste que des pics d'amplitude voisine de 1 V au niveau des discontinuités du signal créneau. b. $f = f_0$: signal dans la bande passante. Le signal de sortie est déformé sauf au niveau des discontinuités du créneau, où il ne présente pas de discontinuités. Sa valeur moyenne est nulle. c. $f = 20f_0$: signal hors de la bande passante. Le signal de sortie est d'amplitude négligeable.



Doc. 42a. $f = \frac{f_0}{20}$: signal hors de la bande passante. Le signal de sortie n'est pas transmis. Il ne reste que des oscillations de faible amplitude semblables à celles du régime pseudo-périodique amorti dans le cas du créneau. b. $f = f_0$: signal dans la bande passante. Le signal de sortie est sinusoïdal de fréquence f_0 . c. $f = 20f_0$: signal hors de la bande passante. Le signal de sortie est quasiment nul.