# Quelques conseils de rédaction

En mathématiques, il ne suffit pas d'avoir l'idée d'un argument, il faut au final se faire comprendre et convaincre notre interlocuteur de la véracité de notre preuve. Aussi géniale que puisse être votre idée, si vous n'êtes pas capable de la présenter avec rigueur et précision, alors elle risque de se révéler vaine car votre interlocuteur pensera à une arnaque, fût-elle volontaire ou non...

A l'inverse, celui qui maîtrise les techniques élémentaires de démonstration et de rédaction trouvera en elles souvent le moyen de débuter un argument quand bien même l'idée lui échappe, ce qui est mieux que rien...

## 1 Introduire une notation, une variable

☡ Toute notation utilisée dans un argument doit être introduite !

### 1.1 Pour désigner un élément quelconque d'un ensemble

Par exemple pour établir une propriété que doivent vérifier tous les éléments d'un certain ensemble $E$, on nomme un élément quelconque de $E$, et pour ce faire on procèdera ainsi :

✔ Soit $x \in E$, ...

Ou encore ainsi :

✔ Pour tout $x \in E$, ...

Un autre nom que $x$ peut bien entendu être utilisé ici, et devra d'ailleurs l'être s'il se trouve que $x$ avait déjà été introduit !

J'utilise pour ma part presque toujours la première proposition, et réserve la seconde aux arguments très courts (sur une voire deux lignes).

Notez qu'une fois que la propriété à établir l'aura été (mais pas avant, bien entendu !), alors il sera possible si besoin est de réutiliser la variable $x$. Par exemple, pour montrer l'égalité de deux ensembles $E$ et $F$, on procède souvent en montrant successivement les deux inclusions $E \subset F$ et $F \subset E$. Ainsi on pourra écrire :

✔ Soit $x \in E$,... ainsi $x \in F$ ce qui montre l'inclusion $E \subset F$.
Soit maintenant $x \in F$, ... ainsi $x \in E$, ce qui montre l'inclusion $F \subset E$ et achève donc de montrer que $E = F$.

### 1.2 Introduire une notation, nommer une constante

Si une expression un peu compliquée doit être utilisée plusieurs fois dans un argument, rien n'interdit de la nommer pour raccourcir les écritures, et peut-être aussi améliorer la lisibilité de votre argument. Par exemple, si on avait à écrire plusieurs fois le réel $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$, rien n'interdirait de le nommer, avec l'une ou l'autre des deux rédactions suivantes :

✔ On pose $K = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

✔ On note $K$ le réel $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.

Les rédactions qui suivent sont en revanche à éviter (pas dramatiques certes, mais inélégantes) :

✘ On note $K = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.

✘ Soit $K = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.

☡ Avec l'écriture « On pose...», écrire toujours le nom à gauche de l'égalité, et seul, afin qu'il ne puisse y avoir d'ambiguïté ni sur ce qui est introduit, ni sur l'expression qu'il s'agit de nommer.

✘ On pose $x + y = 1$

Que s'agit-il de définir ici ? $x$ ? $y$ ? les deux ?

Si l'objet est de définir deux réels $x$ et $y$ satisfaisant à l'équation précédente (et aucune autre condition) alors on pourrait écrire plutôt :

✔ Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $x + y = 1$.

Supposons maintenant que $y$ désigne un certain réel, et que $f$ désigne une certaine fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce qui suit est également une lourde erreur :

✖ Posons $f(x) = y$

Rien ne nous dit qu'il existe un tel $x$ ni, s'il existe, qu'il soit unique. Si les propriétés que l'on connaît de $f$ permettent d'affirmer l'existence d'un antécédent $x$ de $y$ par $f$ (sa surjectivité, par exemple) alors on pourrait écrire plutôt :

✔ On note $x$ un antécédent de $y$ par $f$.

Si l'expression que vous souhaitez nommer fait intervenir des variables dont la valeur n'est pas fixée (par exemple une variable décrivant tous les éléments d'un ensemble) alors vous risquez de vous tendre un piège en nommant cette expression, en vous faisant croire à une expression constante tandis qu'elle ne l'est pas... Deux moyens d'éviter ce piège : définir une fonction (voir plus loin) ou bien présenter en indice le paramètre dont l'expression à nommer dépend.

Par exemple, si $x_0$ désigne un réel fixé, et $h$ un réel quelconque, on pourrait écrire :

✔ On note $\epsilon_h$ le réel $\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)$

### 1.3 Introduire une fonction

Une première mise en garde : il importe de bien faire la différence entre ce qui ne peut guère désigner qu'une expression, et une fonction. Par exemple, on ne peut désigner par $x^2$ la fonction carrée. A vrai dire, le sens que revêt $x^2$ n'est lui-même pas très clair : il n'en a aucun si $x$ n'a pas été introduit, mais si $x$ a été par exemple défini comme un réel, alors bien entendu $x^2$ désigne $x$ élevé au carré, bref il s'agit d'un réel à son tour.

Il n'est pas toujours nécessaire de nommer une fonction pour en parler, ainsi la fonction carrée peut être écrite ainsi : $x \mapsto x^2$, mais cela peut vite s'avérer fastidieux.

Plusieurs rédactions sont possibles pour nommer une fonction :

✔ On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

✔ On note $f$ la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

✔ On note $f$ la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$

Notez que de ces trois définitions, la seconde est la plus précise, puisqu'elle indique l'ensemble d'arrivée, ce qui dans certains cas peut se révéler nécessaire (par exemple lorsque l'on veut étudier la bijectivité d'une application : la fonction exponentielle en tant que fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas une bijection, mais il est bien connu qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.)

## 2 Mais, ensuite, donc, d'après, on a vu que, or, puis, enfin

Il convient en rédigeant de mettre en valeur les articulations logiques entre les différentes étapes d'une preuve, laquelle ne peut se satisfaire d'une simple juxtaposition d'affirmations.

Exemple : Etant donnés des réels strictement positifs $a$ et $b$, établir que $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

✖
$$\begin{array}{l} (a-b)^2 \geqslant 0 \\ \frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0 \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geqslant 0 \\ (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 4 \geqslant 0 \end{array}$$

Mais plutôt :

✔ Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs,
on a bien sûr $(a-b)^2 \geqslant 0$ et également, comme $ab > 0$ : $\frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0$.
En d'autres termes, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geqslant 0$ c'est-à-dire $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

Cela étant dit, cette démonstration, bien que tout à fait correcte, est un peu parachutée, car rares sont ceux qui de l'expression initiale feront le lien immédiatement avec le développement du carré $(a-b)^2$. Il semble plus naturel de partir de l'expression à établir... Mais comment procéder ?

Surtout pas comme cela :

✖✖✖ Si $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$ alors...

Ni comme cela :

✖✖✖ On suppose $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$ alors...

Cela ne devrait venir à l'idée de personne, je l'espère, car où va-t-on si comme point de départ de notre argument on prend pour hypothèse notre conclusion ?

Une bonne démarche peut-être en revanche de raisonner par équivalences, en transformant l'expression à démontrer en une autre, plus simple, et manifestement vraie. L'équivalence entre les assertions prouve alors le résultat recherché :

✔ Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs. Alors
$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$
$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$
$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0$
Cette dernière inégalité étant toujours satisfaite, on a donc bien, pour tous $a$ et $b$ strictement positifs $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

Ce type de raisonnement par équivalences est souvent effectué lorsque l'on cherche à résoudre une équation, ou un système d'équations : on tâche par étapes à transformer notre équation ou système en une équation ou un système plus simple, ce qui nous permet alors d'exprimer la ou les solutions de notre équation.

Pour l'exemple présenté ici, je conseille plutôt de ne pas se focaliser sur l'inégalité, mais plutôt, en regroupant tous les termes d'un même côté, sur le signe d'une expression, ce qui est souvent plus simple et élégant. Cela donnerait ici :

✔ Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs. Alors

$$\begin{aligned} (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) - 4 &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \\ &= \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Ce qui établit l'inégalité attendue.

# 3 Variables libres et variables muettes

Dans une expression, une phrase, peuvent intervenir des variables qu'on appelle variables muettes, c'est-à-dire des variables nécessaires à la compréhension, mais dont la portée est locale... On les reconnaît à ce que on peut changer le nom de ces variables sans changer le sens que revêtent ces expressions.

## 3.1 Un exemple

Etant donné un réel $x$ quelconque, on note $E$ l'ensemble $\{k + xl \mid (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$. (A noter que pour aider à comprendre cette définition ensembliste, on pourrait lire cette écriture ainsi : $E$ est l'ensemble des éléments s'écrivant $k + xl$ où $k$ et $l$ parcourent $\mathbb{Z}$.)

Trois variables interviennent dans la définition de $E$. Deux sont muettes, $k$ et $l$ bien entendu, et la troisième est libre, $x$, ce qui laisse entendre que l'ensemble $E$ peut dépendre du choix de $x$, dont le sens a bien entendu été donné au préalable. Au contraire, rien n'interdit de remplacer respectivement $k$ et $l$ par $u$ et $v$ par exemple.

Question 1 : comment montrer que $E$ est non vide ? Une bien mauvaise inspiration d'abord :

✖ On pose $x = 0$, alors $E = \{k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ est bien sûr non vide.

Le problème vient, vous le devinez, de « On pose $x = 0$ » qui du coup ne permet plus de traiter de l'ensemble $E$ dans le cas général, mais juste d'un cas particulier... Bref, il convient de ne pas toucher à $x$, dont le sens et la valeur ont été fixés par l'énoncé.

Ce n'est cependant pas une contrainte si gênante, car pour exhiber des éléments de $E$, c'est-à-dire des réels s'écrivant $k + xl$ où $k$ et $l$ sont des entiers quelconques, on a l'embarras du choix ! Des rédactions convenables pourraient donc être :

✔ $0 = 0 + x0$ est élément de $E$, donc $E$ est non vide...

(D'autres exemples d'éléments de $E$ : un entier $k$, $x$, $2x$, $2 + 3x$...)

Question 2 : comment choisir un élément quelconque de $E$ et faire le lien entre l'appartenance à $E$ et la définition de $E$ ?

Pas comme cela :

✖ Soit $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, alors $k + xl \in E$,

Ce n'est certes pas faux, tant il est vrai qu'à partir d'un couple $(k, l)$ d'entiers relatifs, $k + xl$ constitue bel et bien un élément de $E$, mais en rédigeant ainsi, il n'est pas clair que nous ayons choisi un élément *quelconque* de $E$. Notre tort a été de commencer par la fin... Tâchons donc de remettre les arguments dans l'ordre :

✖ Soit $x \in E$,

Ce n'est pas vraiment mieux vous l'avez compris... car $x$ est déjà pris ! Mais plutôt :

✔ Soit $y \in E$, alors il existe $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $y = k + xl$.

(Bien sûr, dans cette dernière rédaction, on peut au besoin remplacer $k$ et $l$ par d'autres lettres, rajouter des primes ou des indices...)

## 3.2 Avec des quantificateurs

Imaginons que $f$ désigne une application de $E$ dans $F$ et que nous souhaitions montrer l'implication :

$$\forall A \subset E, f[E \setminus A] \subset F \setminus f[A] \Rightarrow f \text{ est injective}$$

Plusieurs approches sont possibles, mais nous allons procéder de manière directe, donc on pourra commencer ainsi :

✔ On suppose $\forall A \subset E, f[E \setminus A] \subset F \setminus f[A]$

Oublier le quantificateur $\forall A \subset E$ serait bien sûr une grosse erreur, car l'assertion $f[E - A] \subset F \setminus f[A]$ n'aurait alors plus de sens, $A$ n'étant pas défini.

Voici ce que l'élève X a ensuite écrit :

✖ Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $x \neq x'$. On suppose de plus que $x \in A$ et $x' \in E \setminus A$, or par hypothèse $f[E \setminus A] \subset F \setminus f[A]$ et ainsi, comme $f(x') \in f[E \setminus A]$, alors $f(x') \in F \setminus f[A]$ et donc $f(x') \notin f[A]$. En remarquant enfin que $f(x) \in f[A]$ il vient donc $f(x) \neq f(x')$ et on établit ainsi que $f$ est injective.

Au fond, il y a là une (bonne) idée, mais la réalisation est défectueuse pour deux raisons : la première est que notre hypothèse $\forall A \subset E, \ldots$ ne donne pas la valeur d'une partie $A$ de $E$, car $A$ n'intervient là que sous la forme d'une variable muette. Si on veut pouvoir utiliser cette hypothèse, alors il faut au préalable avoir soi-même choisi une partie de $E$ (qu'on nomme comme on le préfère bien sûr).

La deuxième raison est qu'en faisant porter une condition sur $x$ et $x'$, on n'établit pas que pour $x$ et $x'$ quelconques dans $E$, alors $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ et notre argument ne peut donc suffire à conclure.

Pour rattraper cet argument, il convient alors de choisir une partie, mettons $A$, de $E$ pour avoir les conditions que nous souhaitions ci-dessus, à savoir que $x \in A$ et $x' \in E \setminus A$. On se convainc que $A = \{x\}$ convient et une bonne rédaction pourrait alors être :

✔ Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $x \neq x'$. Comme $\{x\} \subset E$, on sait que $f[E \setminus \{x\}] \subset F \setminus f[\{x\}]$. Mais $x' \in E \setminus \{x\}$ et donc $f(x') \in F \setminus f[\{x\}]$ et ainsi $f(x') \notin f[\{x\}]$ ce qui exprime que $f(x') \neq f(x)$. On a ainsi établi que $f$ est injective.

## 4 Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

Sachez résister à la tentation ! La plupart du temps, les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ parsemés sur vos copies n'ont rien à y faire.

Pour en avoir le coeur net, retenez que $\Rightarrow$ se lit «implique» mais en aucun cas ne se lit «donc», «puis» ni même «ce qui implique» ou «ce qui a pour conséquence que» tandis que $\Leftrightarrow$ se lit «équivaut à» mais non «ce qui est équivalent à».

En cas de doute, faites donc l'effort de lire à voix haute votre prose avec les considérations précédentes, et si vous vous sentez obligé de tricher en lisant $\Rightarrow$ avec «donc» par exemple, c'est que vous avez manifestement utilisé ce symbole à contre-emploi...

Avouez qu'il n'est guère plus long d'écrire «donc», ou «ce qui est équivalent à» que les symboles précédents !

## 5 Récurrences

A part dans les cas les plus simples, on ne peut faire l'économie d'un énoncé précis de la propriété de récurrence, et on évitera les rédactions du genre : « montrons *cette (!)* propriété par récurrence » tandis qu'on n'a pas pris la peine d'énoncer la dite propriété.

Pour éviter les rédactions à rallonge, le mieux est souvent de nommer la propriété de récurrence, ce qui permettra de s'y référer sans devoir l'énoncer complètement à nouveau. Ainsi on écrira souvent : on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « ... »

Cela suppose bien sûr qu'entre les guillemets ci-dessus figure une propriété dépendant de la variable entière $n$, autrement dit où $n$ apparaît comme une variable libre. Ce qui suit serait donc une lourde erreur :

✖ On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\forall n \in \mathbb{N}$, ... »

A vrai dire, avec $n$ qui a plusieurs casquettes ici, on aurait bien du mal à comprendre ce que cela veut dire... Soyez bien conscient que ce quantificateur mal placé peut ruiner ce qui, par ailleurs, pourrait être un bon argument.

Un exemple plus élaboré : supposons que nous ayons à montrer :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \binom{p+n+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}$$

et que nous décidions de raisonner par récurrence. Il reste en fait à décider de la variable de la récurrence, car ici on pourrait choisir $n$ ou $p$. (Un choix se trouve plus efficace que l'autre, mais ce n'est pas notre propos).

Si on choisit de raisonner sur $n$, alors on pourra écrire :

✔ On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\forall p \in \mathbb{N}, \binom{p+n+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}$ »

($p$ et $k$ sont alors dans l'expression précédente des variables liées, ou muettes, tandis que $n$ y est une variable libre).

Il n'est pas interdit non plus de rédiger de la manière suivante :

✔ Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier fixé, et posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\binom{p+n+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}$ ».

Puis on annoncera la récurrence qui va suivre : Montrons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n)$ (voire « par une récurrence à deux prédécesseurs » ou « par récurrence double » ou encore « par récurrence forte »)

Puis bien sûr on initialise la récurrence, c'est-à-dire on établit $\mathcal{P}(n_0)$ (voire $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ dans le cadre d'une récurrence à deux prédécesseurs.).

Puis vient l'hérédité : On écrit : Soit $n \geqslant n_0$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ (ou bien pour une récurrence à deux prédécesseurs : on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ ou encore pour une récurrence forte : on suppose que pour tout $k \in [\![n_0, n]\!], \mathcal{P}(k)$.) et bien sûr on démontre sous ces hypothèses la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ (voire $\mathcal{P}(n+2)$).

Il ne reste plus alors qu'à conclure avec une phrase rituelle telle que : « ceci achève la récurrence, et on a donc ainsi établi que, $\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n)$. »

## 6 A propos de l'équation du second degré

Chacun connaît, de l'équation trinomiale $ax^2+bx+c=0$ où $a \neq 0$, $b$ et $c$ sont des réels (ou complexes) et $x$ une variable réelle (ou complexe) ce qu'on appelle le discriminant $b^2-4ac$, qu'on note souvent $\Delta$. Pour autant, il ne suffit pas d'écrire une équation du second degré pour avoir défini ce que sont $a, b, c, \Delta$ ou encore $x_1, x_2$. Ainsi la rédaction suivante est fort maladroite, s'il s'agit par exemple de résoudre l'équation du second degré $x^2-3x+1=0$ :

✖ $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2 - 4\times 1 \times 1 = 5 > 0$ donc $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Vous l'avez compris, si vous voulez utiliser les notations $a, b, c, \Delta$, alors il convient de les définir, mais sur un exemple aussi simple, on pourrait plutôt écrire :

✔ L'équation $x^2-3x+1=0$ d'inconnue $x$ réelle a pour discriminant $9-4=5$ strictement positif, ainsi elle admet deux solutions distinctes que sont $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bien entendu, si pour une discussion qui va suivre il est souhaitable de nommer le discriminant, voire les solutions de l'équation, rien ne l'interdit. Par exemple, si $y$ désigne un réel non nul, et que l'on cherche à résoudre l'équation $yx^2-2x+y=0$ d'inconnue $x$ réelle, on pourrait rédiger ainsi :

✔

Comme $y \neq 0$, alors l'équation $yx^2-2x+y=0(*)$ d'inconnue réelle $x$ est une équation du second degré dont le discriminant $\Delta$ vaut $4-4y^2$.
(Variante 1 : ... est une équation du second degré dont on note $\Delta$ le discriminant. Ainsi $\Delta = 4-4y^2$.
Variante 2 : ... est une équation du second degré. On pose $\Delta = 4-4y^2$ son discriminant )

- Lorsque $y < -1$ ou $y > 1$, alors $\Delta < 0$ et l'équation $(*)$ n'admet dans ce cas aucune racine réelle.
- Lorsque $y = -1$ ou $y = 1$ alors $\Delta = 0$ et l'équation $(*)$ a une unique racine réelle $\frac{1}{y}$
- Lorsque $y \in ]-1, 1[$, alors $\Delta > 0$ et l'équation $(*)$ admet deux racines réelles que sont $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$.