TD de transferts thermique

1. Diffusion thermique en présence d'effet Joule

Un cylindre métallique (de section S, de longueur L, de capacité thermique massique *c*, de conductivité électrique σ et thermique λ) est parcouru longitudinalement par un courant d'intensité I.

On suppose que les extrémités sont maintenues aux températures T_0 et T_1 et que la surface latérale est calorifugée.

1. Écrire l'équation de la chaleur sachant que l'on adopte l'approximation d'un problème unidimensionnel.

2. En déduire la loi d'évolution spatiale de la température en fonction de l'abscisse en régime établi.

3. Examiner les cas particuliers où I = 0 ou bien $T_0 = T_1$ et commenter l'allure des courbes obtenues.

4. Calculer le flux thermique aux deux extrémités. Commenter le résultat.

2. Onde de température

Le sous-sol est considéré comme un milieu semi-infini, homogène de diffusivité thermique $D_{th} = 6.10^{-7}$ m^2.s^{-1}, situé dans le demi-espace x > 0. On suppose que la température de la surface du sol (plan x = 0) est soumise à des variations sinusoïdales : $T_s(t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$

1. Déterminer la température *T(x,t)* d'un point de profondeur x, en régime sinusoïdal forcé (en notation complexe).

2. Commenter le résultat obtenu. Exprimer la vitesse de propagation v de l'onde thermique ainsi obtenue.

3 a. On considère des variations journalières de température, la température variant entre 0 °C la nuit et 16 °C le jour. A partir de quelle profondeur, les variations de température sont inférieures à 1 °C ? Calculer v.

3 b. On considère des variations annuelles de température, variant entre -10 °C et 26 °C. Répondre aux mêmes questions.

3. Double vitrage

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe *Ox* et dont le verre a une conductivité thermique λ. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e < T_i$.

On ne considère que des régimes permanents, indépendants du temps.

1. La paroi est une vitre simple d'épaisseur *e*. Évaluer le flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de λ, *S, e*, T_i, T_e. Calculer la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée.

2. La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur *e*, séparées par une épaisseur *e'* d'air, de conductivité thermique λ'. On ne tient compte que de la conduction.

2a. Évaluer le flux thermique Φ_2 sortant de la pièce, puis Φ_2/Φ_1 .

2b. A.N. T_e = 270 K, T_i = 292 K, *e'* = *e* = 3 mm, λ = 1,2 W.m^{-1}.K^{-1}, λ' = 0.025 W.m^{-1}.K^{-1}.

Calculer Φ_2/Φ_1 et les températures T_1 et T_2 des faces en regards des deux vitres. Représenter graphiquement *T(x)*.

3. En plus de la conduction, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air. Une surface *S* de verre, à la température T_S, échange avec l'air à la température T_f, le flux thermique : $\Phi = hS(T_S - T_f)$ avec *h* > 0.

3a. Quelle valeur implicite donnait-on précédemment à h lorsqu'on confondait T_S et T_f ?

3b. Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R_{th}. Donner l'expression de R_{th}.

3c. Dans les questions **1.** et **2.** les températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur sont T_i' et T_e'. Soit h_e le coefficient d'échange entre le verre et l'air extérieur et h_i celui relatif aux contacts verre-air intérieur.

Les flux Φ_1 *et* Φ_2 des questions **1.** et **2.** deviennent respectivement Φ_1' *et* Φ_2'. Exprimer Φ_1' *et* Φ_2' en fonction de T_i' et T_e', h_i, h_e, et des paramètres *e, e', S,* λ et λ'.

A.N. h_i = 10 W.m^{-2}.K^{-1} et h_e = 14 W.m^{-2}.K^{-1}. Calculer Φ_2/Φ_1. Conclusion ?

4. Sensation de froid et de chaud

On étudie dans ce problème deux modèles destinés à interpréter l'observation suivante : un observateur posant sa main sur une table en bois et une table en acier à la même température a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier.

1. Modèle statique

On adopte le modèle suivant : deux cylindres, isolés latéralement, de même section *S*, de même axe *Ox*, de conductivités λ_1 et λ_2, de masses volumiques μ_1 et μ_2, de capacité thermique massique c_1 et c_2, de longueur L_1 et L_2, sont mis bout à bout en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ des deux cylindres aux températures respectives T_1 et T_2. On étudie un régime stationnaire pour lequel la température $T(x,t)$ est indépendante de t.

a. Établir l'expression de $T(x)$ dans les deux cylindres en fonctions de T_1, T_2, x, L_1, L_2 et de la température T_i en $x = 0$.

b. En déduire que la température T_i à l'interface est un barycentre de T_1 et T_2.

La température T_1 correspond à 37 °C (main) et T_2 à 20 °C (acier ou bois), et on suppose $L_1 = L_2$. Calculer T_i pour un contact main-bois, puis main-acier. Commenter.

Main	$\lambda_1 = 10$ W.m^{-1}.K^{-1}
Bois	$\lambda_2 = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}
Acier	$\lambda_2 = 100$ W.m^{-1}.K^{-1}

2. Modèle dynamique

On suppose dans cette partie que les deux cylindres sont illimités (cylindre 1 en $-\infty$, cylindre 2 en $+\infty$) et en contact en $x = 0$

Initialement à t = 0, le cylindre 1 est à la température T_1 uniforme et le cylindre 2 à T_2.

Puis, pout t > 0, les extrémités sont maintenues à des températures constante, soit : $T(-\infty, t) = T_1$ et $T(+\infty, t) = T_2$.

On admet qu'à l'interface, il s'établit instantanément une température stationnaire T_i.

a. Pour un corps de conductivité λ, de masse volumique μ, de capacité thermique massique *c*, de diffusivité thermique *D*. Monter que la fonction $f_D(x,t)$ est solution de l'équation de diffusion thermique à une dimension.

$$f_D(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-u^2} du$$

Tracer l'allure du graphe de $f_D(x,t)$ en fonction de *x* à différents instants t ; que devient cette courbe lorsque *t* tend vers 0 ? On donne : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

b. Exprimer pourquoi on peut chercher une solution de l'équation de diffusion dans un demi-espace $x < 0$ de la forme : $T(x,t) = A + B\, f_{D1}(x,t)$ avec *A* et *B* constantes (*D1* : coefficient de diffusion du milieu 1).

Déterminer *A* et *B* en fonction de T_1 et T_i.

c. Chercher de même une solution $T(x,t) = F + G f_{D2}(x,t)$ dans le demi-espace $x > 0$ et déterminer *F* et *G* en fonction de T_2 et T_i (*D2* : coefficient de diffusion du milieu 2).

d. Établir les expressions des densités de flux thermiques j_{Q1} et j_{Q2} dans les deux matériaux en fonction de *x*, *D1*, *D2*, λ_1, λ_2 et *t*, et en déduire l'expression de T_i en fonction de T_1, T_2 et des effusivités E_1 et E_2 de ces deux matériaux, avec $E = \sqrt{\mu c \lambda}$.

e. Calculer T_i pour un contact main-bois et un contact main-acier en reprenant les températures du **1b.** et les effusivités ci-contre. Commenter.

f. Comment expliquer que la température T_i à l'interface s'établisse instantanément lorsqu'on met en contact les deux cylindres à T_1 et T_2 ?

Main	$E_1 = 1{,}8.10^3$ SI
Bois	$E_2 = 0{,}4.10^3$ SI
Acier	$E_2 = 14.10^3$ SI

5. Rayonnement thermique du Soleil et effet de serre dû à l'atmosphère

On admet que le Soleil et la Terre rayonnent comme des corps noirs sphériques de températures T_S et T_T. On suppose le régime permanent.

Rayon du Soleil	$R_S = 6{,}97.10^5$ km
Rayon terrestre et atmosphérique	$R_T = 6\,400$ km
Distance Terre-Soleil	$d = 1{,}44.10^8$ km

1a. Déterminer la température à la surface du Soleil sachant que le maximum d'émission est situé à 520 nm.

1b. En déduire la puissance reçue par la Terre en provenance du Soleil.

1c. Avec les hypothèses faites, quelle serait la température de la Terre ? Commenter le résultat obtenu.

2. On tient compte, dans cette question, de l'atmosphère de la Terre qui constitue un écran d'épaisseur faible par rapport au rayon terrestre. Le modèle simplifié utilise les hypothèses suivantes :

- l'atmosphère rayonne la fraction β de l'énergie que rayonnerait un corps noir de même température moyenne T_a ;
- l'atmosphère absorbe une fraction α et la Terre, une fraction 1- α du rayonnement solaire ;
- la Terre absorbe la totalité du rayonnement de l'atmosphère vers la Terre et l'atmosphère une fraction β du rayonnement terrestre. Soit T_T' la température d'équilibre thermique de la Terre.

2a. Donner l'expression littérale de T_a et T_T' en fonction de T_T, α et β.

2b. On donne $\alpha = 0{,}5$ et $\beta = 0{,}9$. Déterminer numériquement T_a et T_T'. Comparer T_T' et T_T.

2c. Calculer les longueurs d'onde caractéristiques λ_a et λ_T' du rayonnement thermique émis par l'atmosphère et par la Terre.

2d. Pourquoi α et β sont différents ?